Spazi Frattali: Paradossi della Semplicita'

Cipriani Fabio, Politecnico di Milano

Seminari di Cultura Matematica: Milano 3 giugno 2009

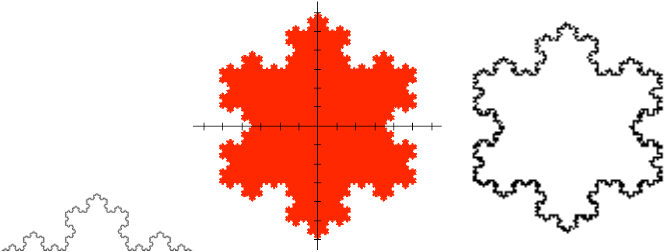
Frattali e Autosimilarita'

Un frattale K e' uno spazio rappresentabile come unione di parti $K_1, \cdots, K_N$, deformazioni continue di K:

$$K = F_1(K) \cup \cdots \cup F_N(K)$$

$$F_i : K \longrightarrow K \qquad F_i(K) \subset K$$

- Curva di Koch, fiocco di Koch e suo bordo



Costruzione di Frattali

Theorem (Teorema delle contrazioni)

Date le contrazioni $F_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \cdots, N$, esiste un unico frattale $K \subset \mathbb{R}^n$ tale che

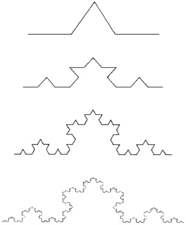
$$K = F_1(K) \cup \cdots \cup F_N(K)$$

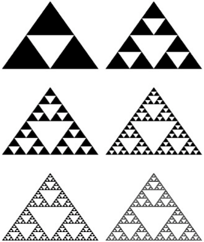
Inoltre per ogni compatto $C \subset \mathbb{R}^n$, la successione di compatti $F^n(C) := F(F(\cdots F(C)))$ converge a K:

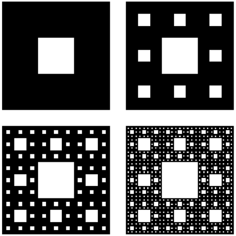
$$K = \lim_{n \to \infty} F^n(C)\,.$$

- L'insieme dei compatti di uno spazio metrico completo e' uno spazio completo nella distanza di Hausdorff $H - dist$.

Curva di Koch, Sierpinski gasket, Sierpinski carpet







Ri-costruzione di Frattali

Theorem (Barnsley's collage: compressione di immagini)

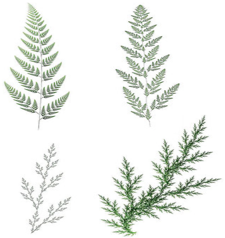
Sia dato un compatto C. Se $F_1, \cdots, F_N$ sono contrazioni per cui

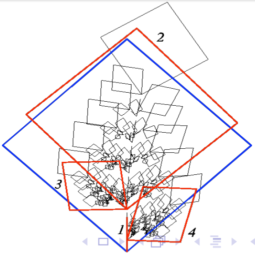
$$\mathrm{H}-\mathrm{dist}(C, F_1(C) \cup \cdots \cup F_N(C)) \leq \varepsilon$$

e $K = F_1(K) \cup \cdots \cup F_N(K)$ e' il frattale loro associato, allora

$$\mathrm{H}-\mathrm{dist}(C, K) \leq \varepsilon/1-s$$

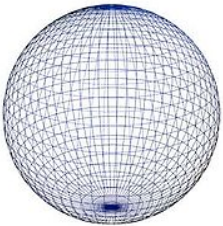
essendo $0 < s < 1$ il loro parametro di contrazione.





- La geometria di molti spazi di cui abbiamo esperienza comune quali sfere, tori e superfici e' riemanniana, cioe' localmente euclidea: ogni punto ha un intorno abbastanza piccolo in cui le distanze soddisfano la legge pitagorica:

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$$



Geometria di spazi frattali

- L'esistenza di punti di ramificazione negli esempi visti suggerisce che, in generale, i frattali, non siano spazi localmente euclidei.
- Essi sono spazi metrici (K, d), dotati cioe' di funzione distanza d, la cui geometria, paradossale se indagata con strumenti classici, si discosta per vari aspetti da quella riemanniana:
- dimensione
- misura
- energia
- spettro e autofunzioni
- topologia

Dimensione di Hausdorff

- Contenuto di Hausdorff s-dimensionale di (K, d):

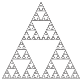
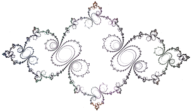
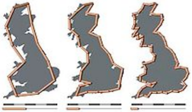
$$C_s(K) := \inf\{\sum_i r_i^s : K \subseteq \bigcup_i B(x_i, r_i)\}$$

- Dimensione di Hausdorff di (K, d):

$$\dim_H(K) := \inf\{s \geq 0 : C_s(K) \geq 0\}$$

- una palla B nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ ha $\dim_H(B) = n$
- una sfera S nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ ha $\dim_H(S) = n - 1$
- una curva Γ nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ ha $\dim_H(\Gamma) = 1$

Esempi di dimensione frattali (intere e non)

- curva di Koch:  $\dim_H(K) = \log_3 4$
- Sierpinki gasket:  $\dim_H(K) = \log_2 3$
- Julia set:  $\dim_H(K) = 2$
- Great Britain coastaline:  $\dim_H(K) \simeq 1,25$

Misura e rettificabilita'

- La curva di Koch e' un frattale di lunghezza infinita contenuto nel piano $\mathbb{R}^2$.
- Il gasket di Sierpinski e' un frattale di aera nulla contenuto nel piano $\mathbb{R}^2$.
- La classe naturale di misure di un frattale non e' ereditata dall'essere sottoinsieme di uno spazio euclideo ma e' intrinseca all'autosimilarita': $K = F_1(K) \cup \cdots \cup F_N(K)$
- Misure autosimilari: $A \subseteq K$

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(F_i^{-1}(A)) \qquad \alpha_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

Operatore di Laplace su frattali

- Negli anni ’80 in Meccanica Statistica e in Fisica dello Stato Solido si sono cominciati ad usare come modelli spazi frattali. Ipotizzando un loro comportamento elastico si e’ considerata, ad esempio, un’equazione delle onde

$$\partial_t^2 u - Lu = 0$$

- Negli stessi anni in Probabiita’ si sono costruiti processi stocastici su frattali dando cosi’ soluzione ad un’equazione della diffusione

$$\partial_t u = Lu$$

- Si sono considerati su frattali generalizzazioni L dell’usuale operatore di Laplace degli spazi euclidei o riemanniani, generatore del moto Browniano, della diffusione del calore, etc.

Forme d'energia autosimilari

- Gli operatori di Laplace naturali su frattali sono quelli la cui forma d'energia, generalizzazione dell'usuale integrale di Dirichlet in ambito euclideo, e' autosimilare

$$E[u] = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_i} E[u \circ F_i] \qquad u \in C(K)$$

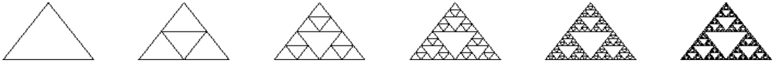
  essendo $r_i, \cdots, r_N > 0$ caratteristici rapporti d'energia.
- L'operatore L associato ad una forma d'energia E e ad una misura μ su K e' allora determinato dalla relazione

$$\int_K u \cdot Lu \, d\mu := E[u]$$

- La forma d'energia e' limite $E[u] := \lim_{k\to\infty} E_k[u]$ di forme d'energia

$$E_k[u] = \left(\frac{5}{3}\right)^k \sum_{x_i, x_j \in V_k} |u(x_i) - u(x_j)|^2$$

associate all'approssimazione di K con grafi V_k



- Il Laplaciano e' limite $Lu := \lim_{k\to\infty} L_k u$ dei Laplaciani dei grafi V_k

$$L_k u(x) := 5^k \sum_{y \in V_k \ x \simeq y} (u(y) - u(x))$$

Strutture armoniche su frattali

- Una costruzione generale permette di ottenere forme d'energia autosimilari da strutture armoniche, cioe' da successioni di forme d'energia E_m sui grafi $V_m \subset V_{m+1}$ soddisfacenti un principio di estensione armonica

$$E_m[u] = \inf\{E_{m+1}[v] : v = u \text{ su } V_m\}$$

Singolarita' della distribuzione d'energia

- La distribuzione d'energia $\Gamma[u]$ di una configurazione $u : K \to \mathbb{R}$ e' la misura su K determinata da

$$\int_K v \, d\Gamma[u] := 2E(vu|u) - E(v|u^2)$$

  essendo $E(\cdot|\cdot)$ la forma bilineare associata alla forma quadratica dell'energia $E[u]$.
- La distribuzione d'energia $\Gamma[u]$ e' tipicamente singolare rispetto a tutte le misure autosimili su K
- in netto contrasto con il caso riemanniano dove la misura d'energia $|\nabla u|^2 dx$ corrispondente all'integrale di Dirichlet $E[u] = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$ ammette la funzione $|\nabla u|^2$ come densita' rispetto alla misura riemanniana dx

Spettro

- Il Laplaciano L associato ad una forma d'energia E e ad una misura autosimilare μ su K ha tipicamente uno spettro discreto $\{\lambda_k : k \geq 1\} \subset (0, +\infty)$ la cui distribuzione asintotica e' di tipo polinomiale (Weyl)

$$|\{k \geq 1 : \lambda_k \leq x\}| \simeq \mu(K) x^{d_S/2} \qquad x \to +\infty$$

- la dimensione spettrale d_S e' legata dalla relazione $d_S = 2d_H/(d_H + 1)$ alla dimensione di Hausdorff di K rispetto alla distanza della resistenza effettiva

$$R(x, y) := \sup\{|u(x) - u(y|^2) : E[u] = 1\}$$

- la molteplicita' degli autovalori e' illimitata

Autofunzioni localizzate

- In frattali molto simmetrici (Sierpinski gasket) i Lplaciani ammettono autofunzioni localizzate, per ogni $x \in K$ e per ogni suo intorno $U \subset K$ esiste una autofunzione

$$Lu = \lambda u$$

  localizzata in U (con supporto contenuto in U)
- in particolare, il Laplaciano con condizioni di Dirichlet e quello con condizioni di Neumann possono avere autofunzioni comuni

Topologia di spazi frattali

- La topologia di uno spazio frattale, quindi la classe delle funzioni continue su di esso, sono una caratteristica intrinseca allo spazio e non dipendono dalla sua immersione in altri ambienti (per esempio euclidei).
- Cio' segue dal fatto che ogni frattale puo' essere ottenuto come quoziente (cioe' identificando punti) dello spazio delle sequenze o indirizzi di Bernoull Σ: $\pi : \Sigma \to K$. Una funzione $u : K \to \mathbb{R}$ e' continua su K se e solo se $u \circ \pi$ e' continua su Σ.

Paradossi topologici legati alle proprieta' di connessione

- Identificando cammini chiusi (cicli) in K che possono essere deformati uno nell'altro con continuita', si definisce il gruppo fondamentale di $\pi_1(K)$
- a differenza che nel caso riemanniano $\pi_1(K)$ non e' necessariamente discreto ne finitamente generato
- in generale non esiste il ricoprimento universale di K (dove ogni ciclo sarebbe contraibile ad un punto)
- esistono cicli non deformabili uno nell'altro tra i quali non vi sono "buchi" come ad esempio i due cicli nel Sierpinski gasket che circondano tutte le lacune