POLITECNICO DI MILANO

Nello spazio in tre

Le missioni spaziali e il problema dei tre corpi

prof.ssa Amalia Ercoli-Finzi e ing. Francesco Topputo

Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale

Politecnico di Milano

Dipartimento di matematica “F. Brioschi” - Politecnico di Milano

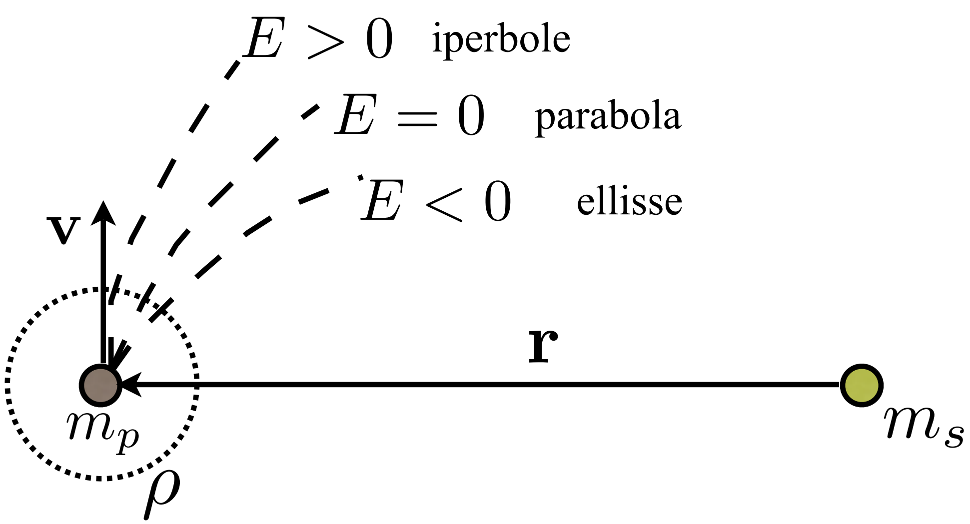
18 Aprile 2007

Agenda

- La progettazione di traiettorie spaziali
- L'approccio classico, cenni storici
- I problemi a *n* corpi
- Il problema dei tre corpi ristretto
- I punti lagrangiani
- Natura dei punti lagrangiani
- Le varietà invarianti
- I trasferimenti *low energy*
- Orbite risonanti
- Il problema dei quattro corpi e la fuga balistica
- Conclusioni

Il problema dei due corpi

- equazione di moto: $\ddot{\mathbf{r}} + \dfrac{k}{r^3}\mathbf{r} = 0$
- energia $E = \dfrac{1}{2}v^2 - \dfrac{k}{r} = cost$
- momento angolare $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = cost$



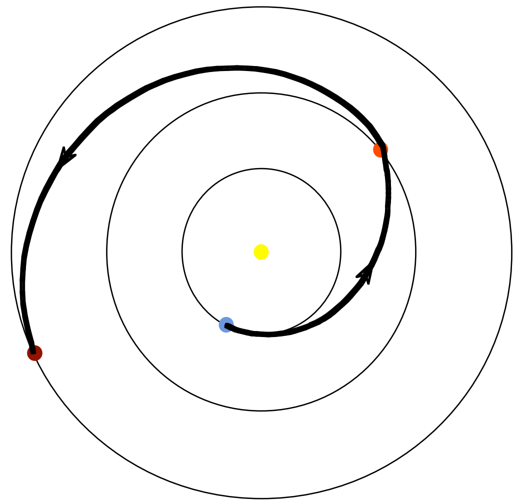
- raggio sfera di influenza $\rho = r\left(\dfrac{m_p}{m_s}\right)^{2/5}$

POLITECNICO DI MILANO

Il metodo delle “patched-conics”

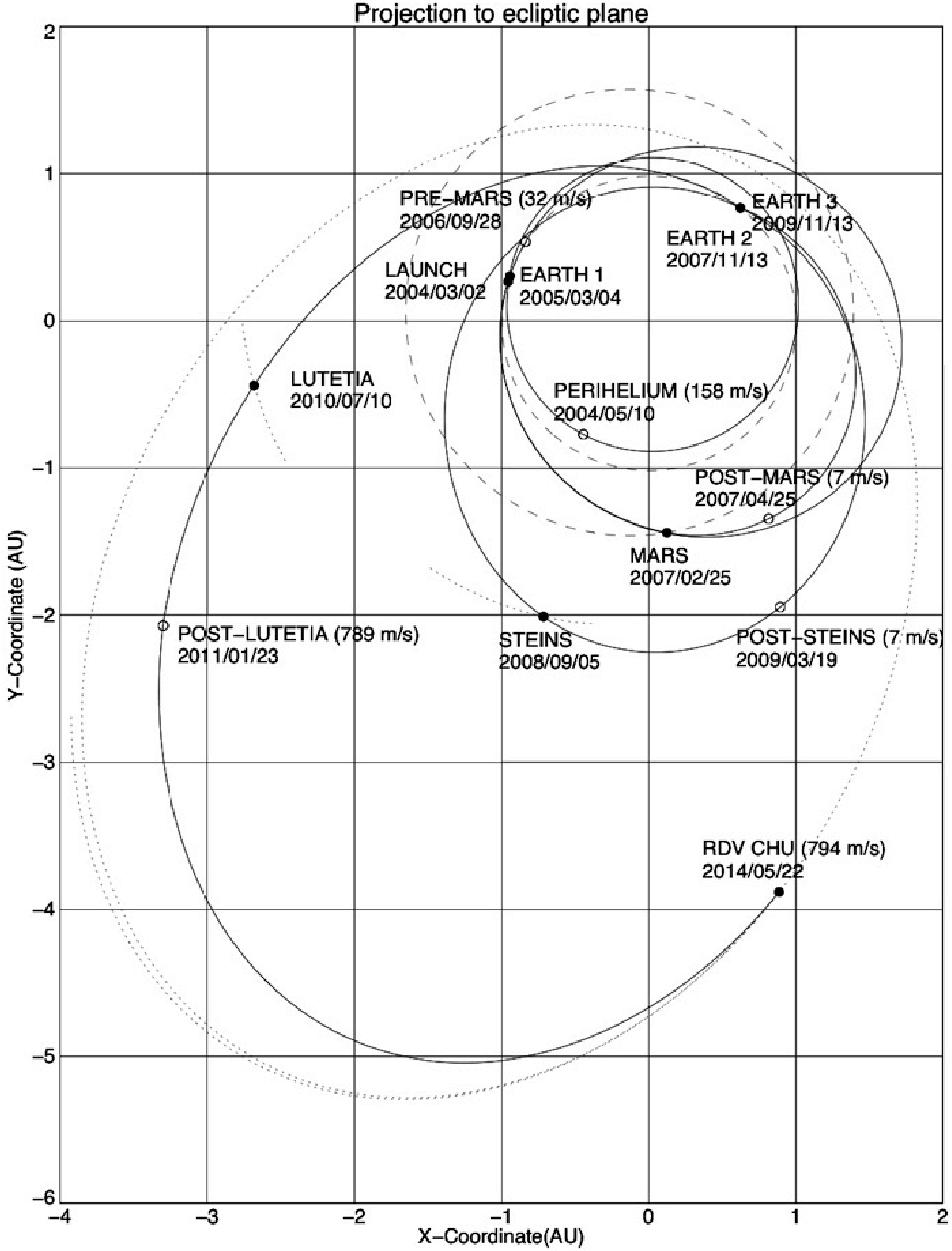
POLITECNICO DI MILANO

Intera traiettoria determinata dall’unione di diverse coniche, soluzioni del problema di Keplero

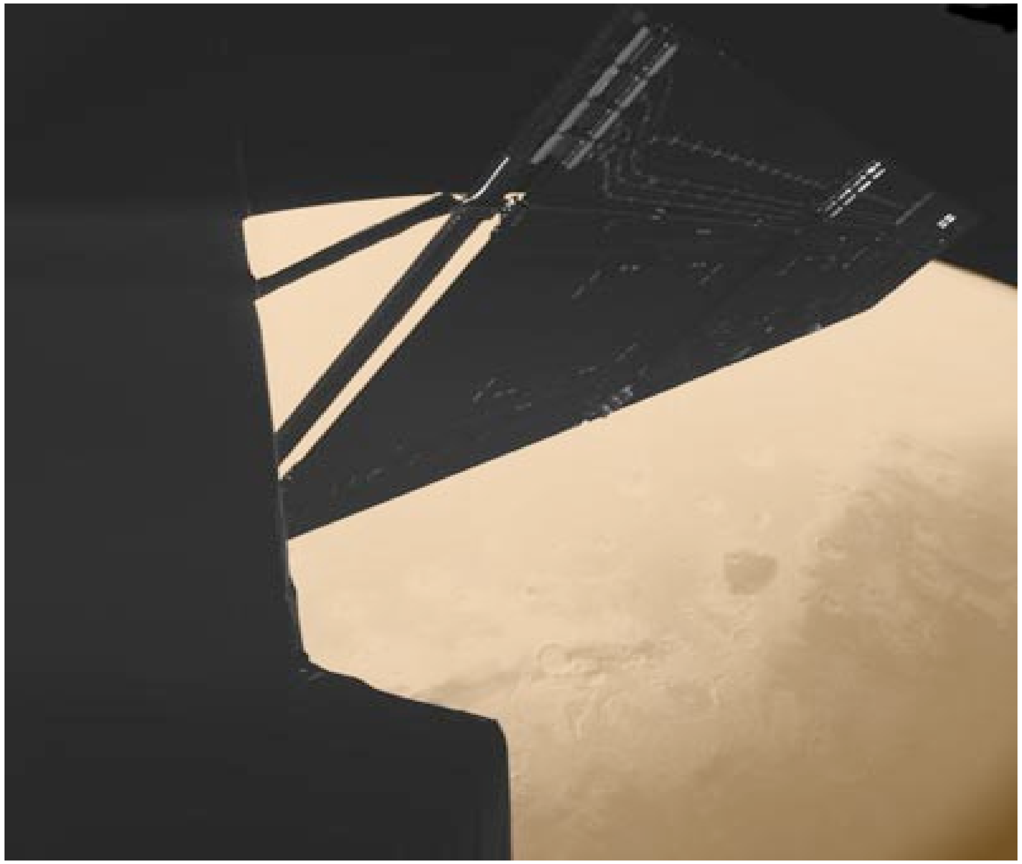


- richiede la soluzione di problemi a due corpi (sole/pianeta-sonda)
- considera *una sola* attrazione gravitazionale
- introduce il concetto di *sfere d’influenza*
- consente di progettare traiettorie complesse (*multiple gravity assist*)

La missione Rosetta



	Launch	Earth-1	Mars	Earth-2	Earth-3
Date	2004 Mar 02	2005 Mar 04	2007 Feb 25	2007 Nov 13	2009 Nov 13
V-inf (km/s)	3.547	3.863	8.809	9.362	9.379
Rad of peric (km)	6771	8341	3650	11680	8861



A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

Caratteristiche dell'approccio classico

- ★ soluzioni analitiche
- ★ interpretazione immediata delle costanti del moto
- ★ soluzioni prossime a quelle "vere"
- ★ trasferimenti ad alta energia

… ma …

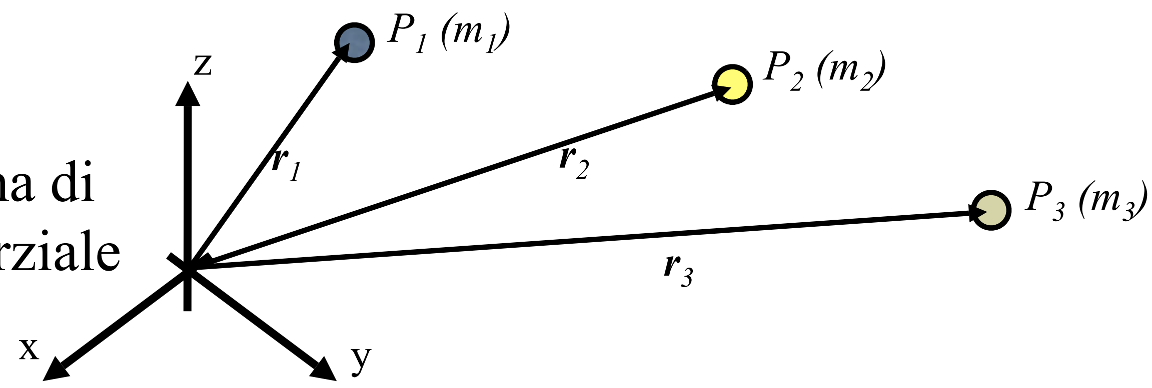
- ‣ cosa succede se il satellite permane in regioni dove due (o più) attrazioni gravitazionali sono confrontabili?
- ‣ è possibile diminuire il costo (Δv) dei trasferimenti?

Modelli a n-corpi
Le equazioni di Newton

POLITECNICO DI MILANO

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} G\,\frac{m_j m_k}{r_{jk}^3}\,(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

(x, y, z) sistema di riferimento inerziale



- In astrodinamica si considerano solo modelli ristretti:
  - Il moto dei corpi celesti (primari) è assegnato
  - Il satellite non influenza il moto dei primari
  - Il problema è *ristretto* allo studio del moto del satellite

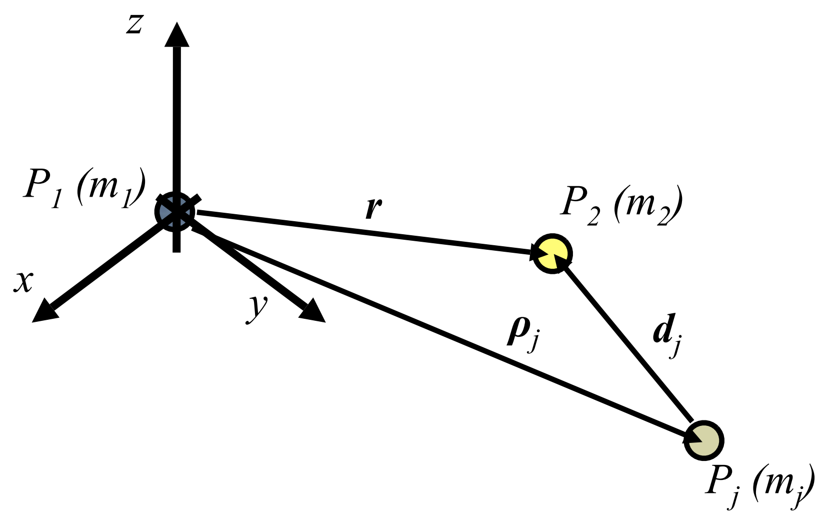
POLITECNICO DI MILANO

Il problema di Keplero perturbato

$$\boxed{\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} + \mu\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}}_{\text{problema dei due corpi}} = \underbrace{-G\sum_{j=3}^{n} m_j\left(\frac{\mathbf{d}_j}{d_j^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}_j}{\rho_j^3}\right)}_{\text{perturbazione di terzo corpo}} = \sum_{j=3}^{n}\frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{r}}}$$

$$V_j = G m_j\left(\frac{1}{d_j} - \frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\rho}_j}{\rho_j^3}\right)$$

La perturbazione del terzo corpo ammette potenziale



Il disturbo dato da P_j potrebbe equilibrare l'attrazione gravitazionale di P_1

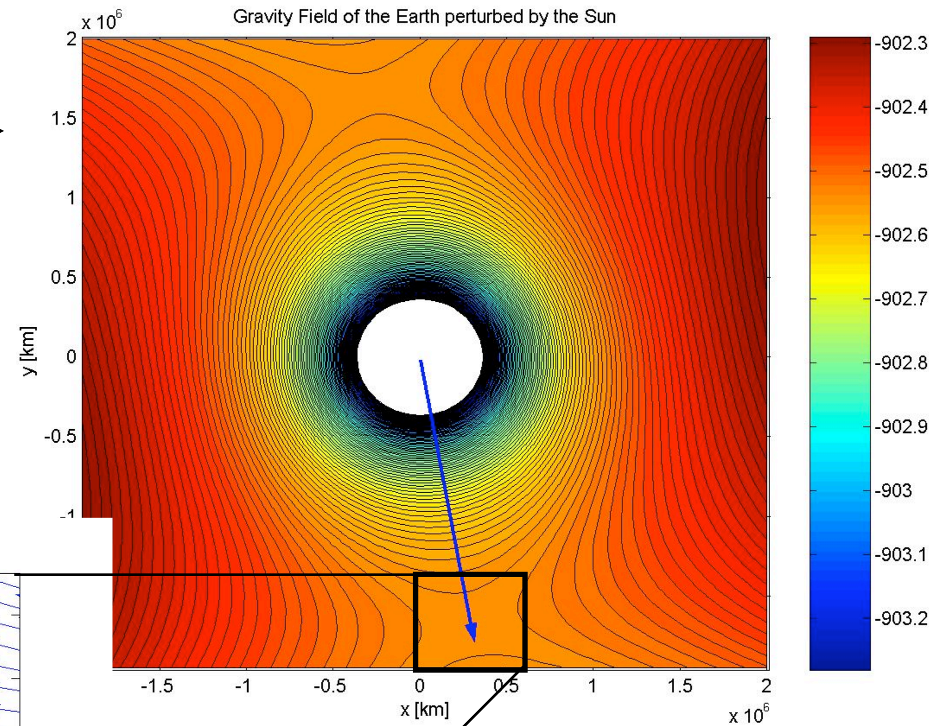
A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

Esempio
Terra-satellite perturbato dal Sole

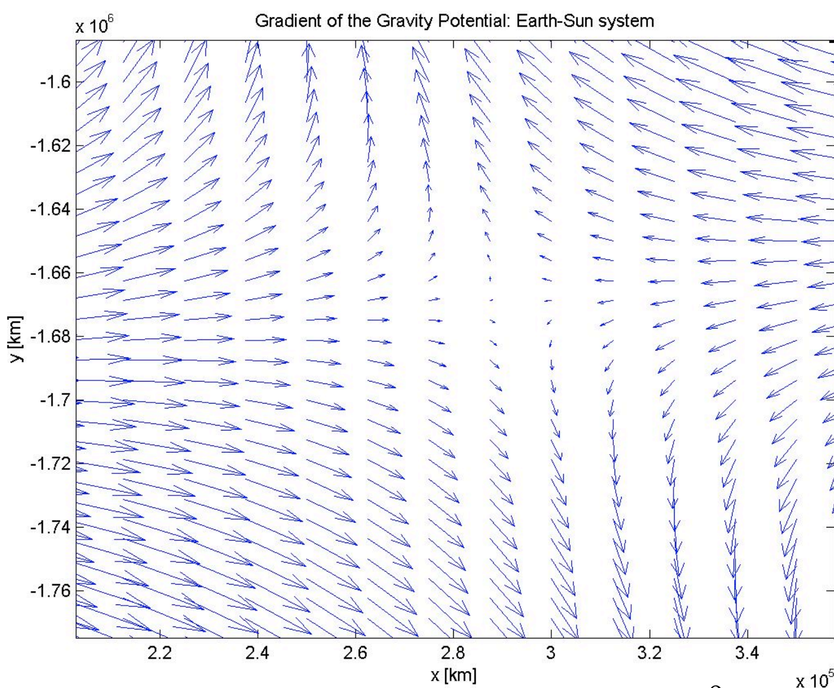
POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento di matematica - 18 aprile 2007

Potenziale totale



Le forse si fanno equilibrio
in alcuni punti ...



forza totale

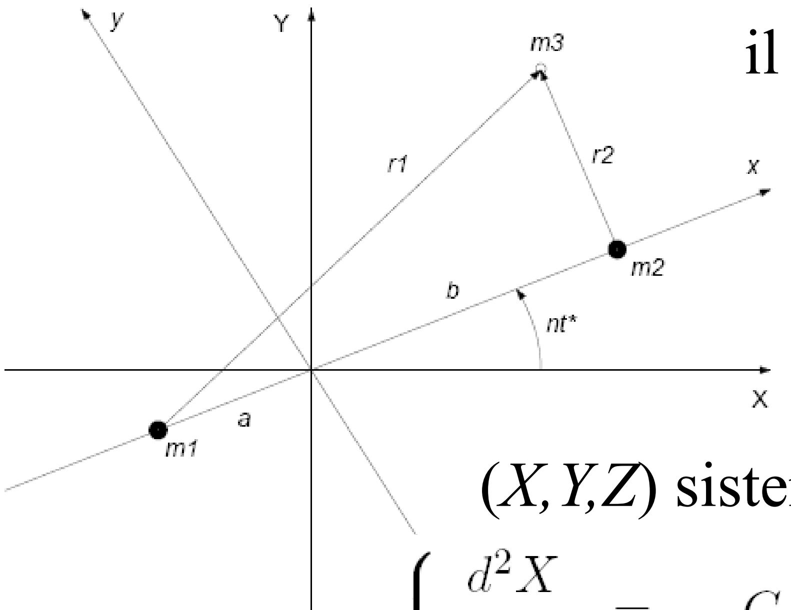
A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

Il problema dei tre corpi ristretto

POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento di matematica - 18 aprile 2007

- i due primari agiscono sul terzo corpo (massa trascurabile)
- il terzo corpo non influisce sui primari
- i due primari si muovono di moto circolare attorno al loro centro di massa (problema circolare)



il moto dei primari è *assegnato*:

$$X_1 = -a\cos nt^*, \quad X_2 = b\cos nt^*,$$
$$Y_1 = -a\sin nt^*, \quad Y_2 = b\sin nt^*.$$

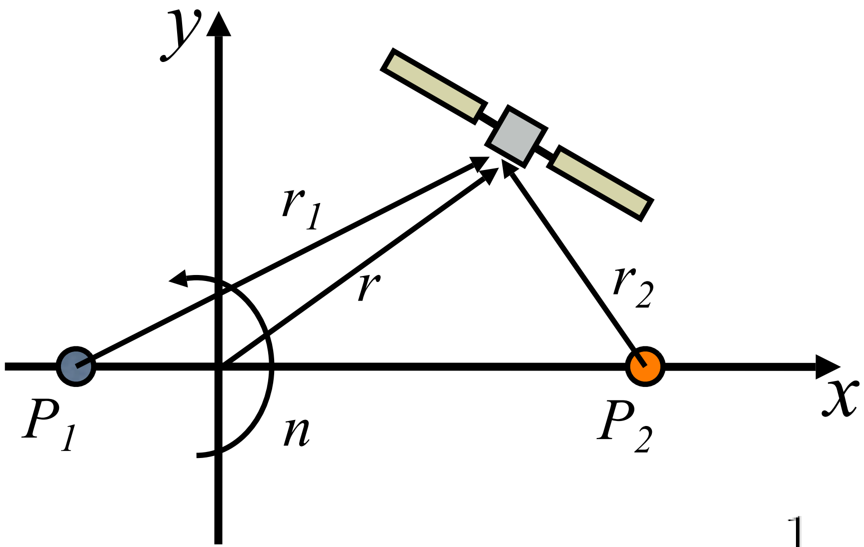
Il problema è *ristretto* al moto del terzo corpo

(X,Y,Z) sistema inerziale

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^{*2}} = -G\left[\dfrac{m_1(X+a\cos nt^*)}{R_1^3} + \dfrac{m_2(X-b\cos nt^*)}{R_2^3}\right], \\ \dfrac{d^2Y}{dt^{*2}} = -G\left[\dfrac{m_1(Y+a\sin nt^*)}{R_1^3} + \dfrac{m_2(Y-b\sin nt^*)}{R_2^3}\right], \\ \dfrac{d^2Z}{dt^{*2}} = -G\left[\dfrac{m_1 Z}{R_1^3} + \dfrac{m_2 Z}{R_2^3}\right], \end{cases}$$

Sistema di riferimento rotante

- Equazioni adimensionali scritte in un riferimento rotante (sinodico) solidale con i primari. Il sistema dinamico è *autonomo*.



$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x,$$
$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y,$$
$$\ddot{z} = \Omega_z,$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

parametro di massa
del PR3C

$$\Omega(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu)$$

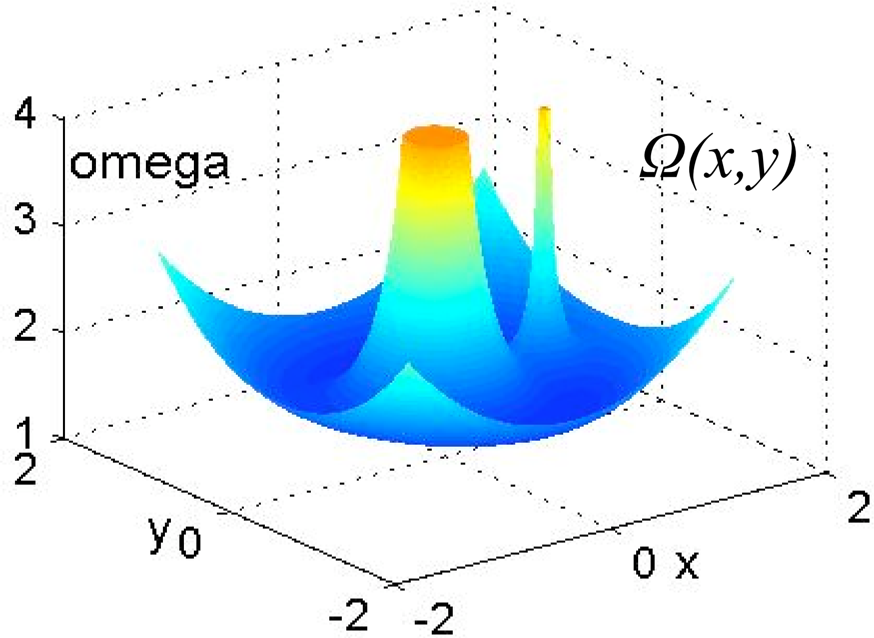
$$r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2 + z^2,\ r_2^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2$$

$G = 1$	$n = 1$
$m_1 = 1-\mu$	$x_1 = -\mu$
$m_2 = \mu$	$x_2 = 1-\mu$

Integrale di Jacobi

- Il PR3C ha *un solo* integrale del moto: l'integrale di Jacobi
- Il problema non è integrabile! solo osservazioni qualitative ...
- Si possono stabilire regioni *vietate* ad *ammesse* al moto

$$C = 2\Omega(x,y,z) - \underbrace{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}_{\geq 0}$$



Dato $\boldsymbol{x}_0$, allora $C_0 = C(\boldsymbol{x}_0)$ e le regioni ammesse sono (x,y,z) tali che $\Omega(x,y,z) \geq C_0/2$

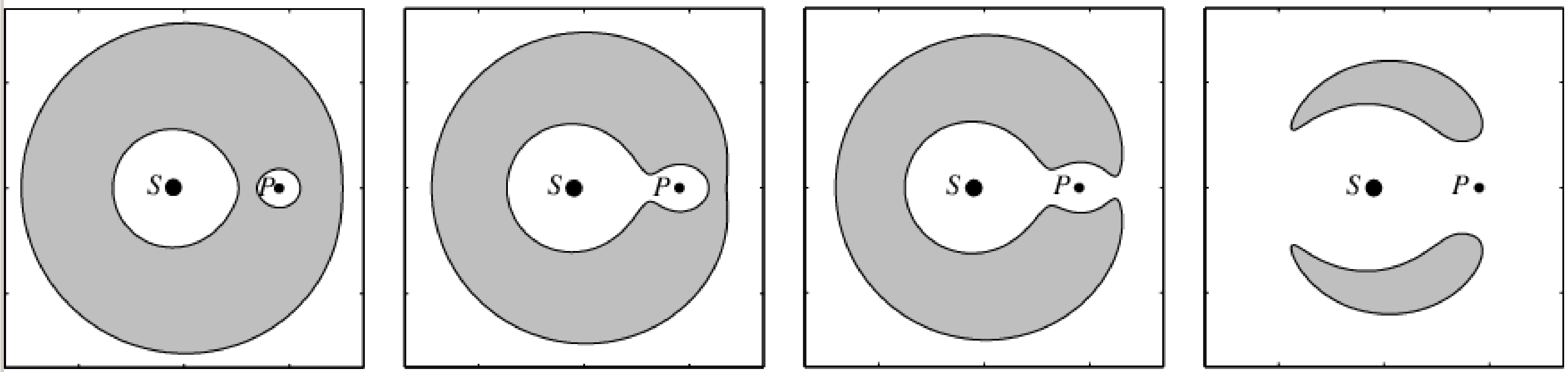
A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento di matematica - 18 aprile 2007

POLITECNICO DI MILANO

Regioni vietate e curve di Hill

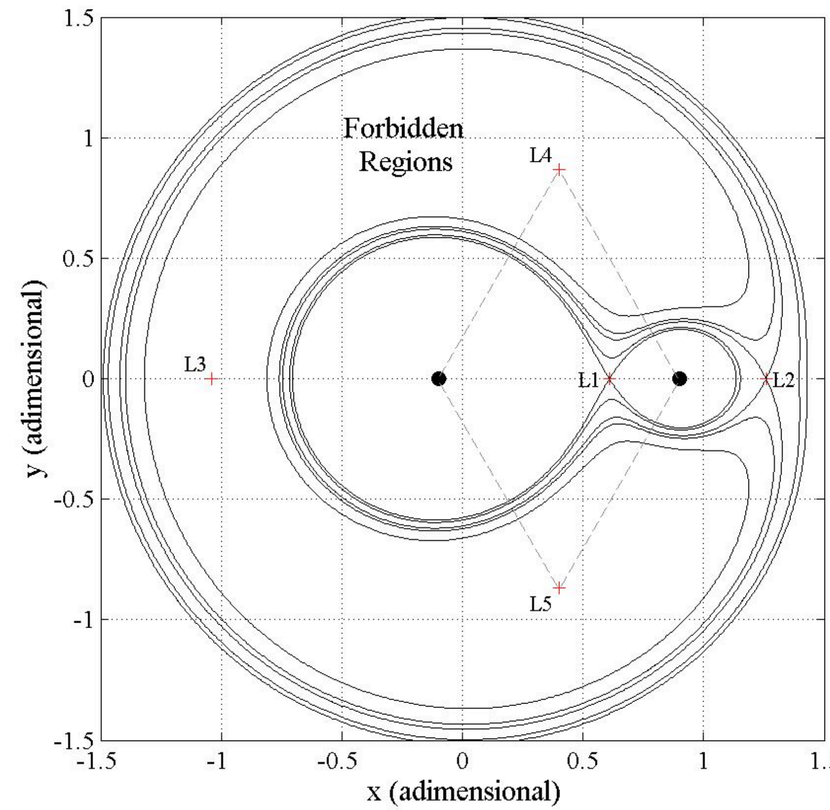


(a) Case 1 : $E<E_1$ (b) Case 2 : $E_1<E<E_2$ (c) Case 3 : $E_2<E<E_3$ (d) Case 4 : $E_3<E<E_4=E_5$

$$C = -2E$$

C elevato $\Rightarrow$ bassa energia!

Se $C<3$, il satellite è libero di muoversi nell'intero spazio *(x,y,z)*

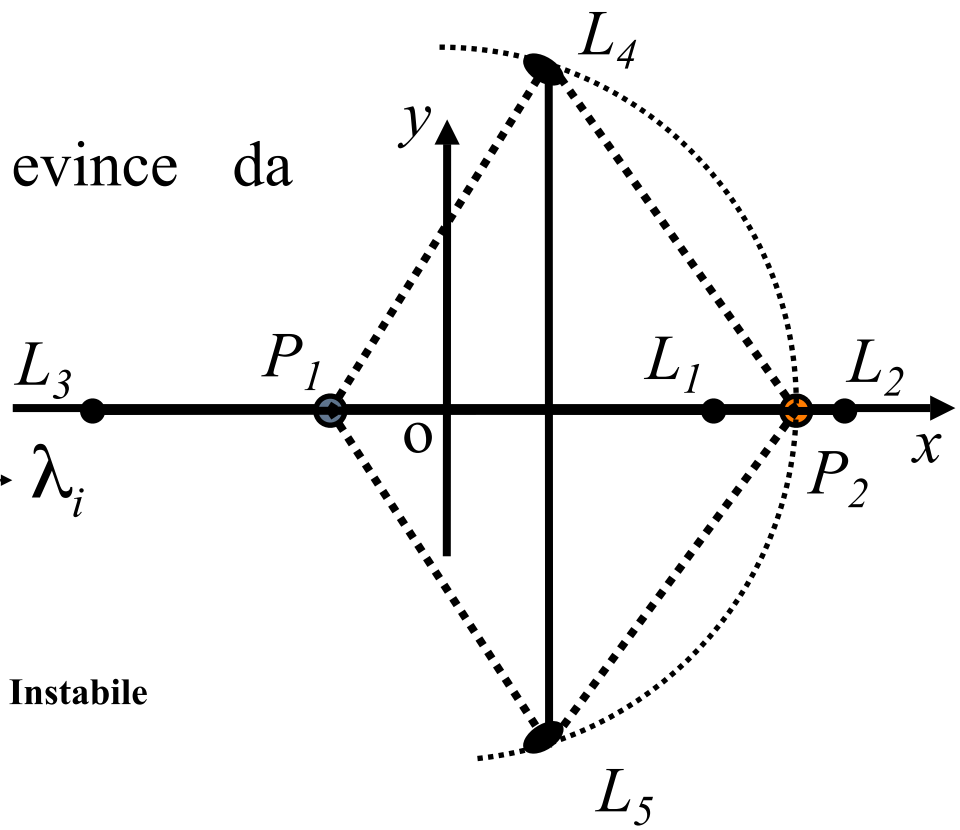


Dipartimento di matematica - 18 aprile 2007

Punti di equilibrio

Il sistema dinamico ha 5 punti di equilibrio (punti lagrangiani).

La "natura" dei punti si evince da un'analisi lineare.



$$\dot{x} = f(x) \longrightarrow \dot{x} = Ax \longrightarrow \lambda_i$$

$$L1,\ L2,\ L3: \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_{3/4} = \pm i\alpha_1 \\ \lambda_{5/6} = \pm i\alpha_2 \end{cases} \longrightarrow \textbf{Instabile}$$

$$L4,\ L5: \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1/2\{-1+[1-27\mu(1-\mu)]^{1/2}\}} \\ \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{1/2\{-1-[1-27\mu(1-\mu)]^{1/2}\}} \\ \lambda_{5,6} = \pm i\gamma \longrightarrow \textbf{Stabile} \ \textbf{se} \ \mu < \mu_0 = 0.0385 \end{cases}$$

Nota: l'equilibrio è relativo al sistema sinodico!

A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

PR3C nel sistema solare

System	μ
Sun – Mercury	0.00000 01667
Sun – Venus	0.00000 24510
Sun – Earth	0.00000 30359
Sun – Mars	0.00000 03233
Sun – Jupiter	0.00095 38754
Sun – Saturn	0.00028 55022
Sun – Uranus	0.00004 37254
Sun – Neptune	0.00005 17732
Sun – Pluto	0.00000 27778
Earth – Moon	0.01215 06683

I punti triangolari dei PR3C del sistema solare sono *stabili*

I punti collineari L_1 e L_2 sono importanti per le applicazioni

- bassi valori di energia (alti valori C)
- dinamiche, stabili e instabili, veloci

autovalori stabili e instabili ⇨ Orbite iperboliche intorno a L_1 e L_2

autovalori complessi e coniugati ⇨ Orbite periodiche intorno a L_1 e L_2

Cenni storici

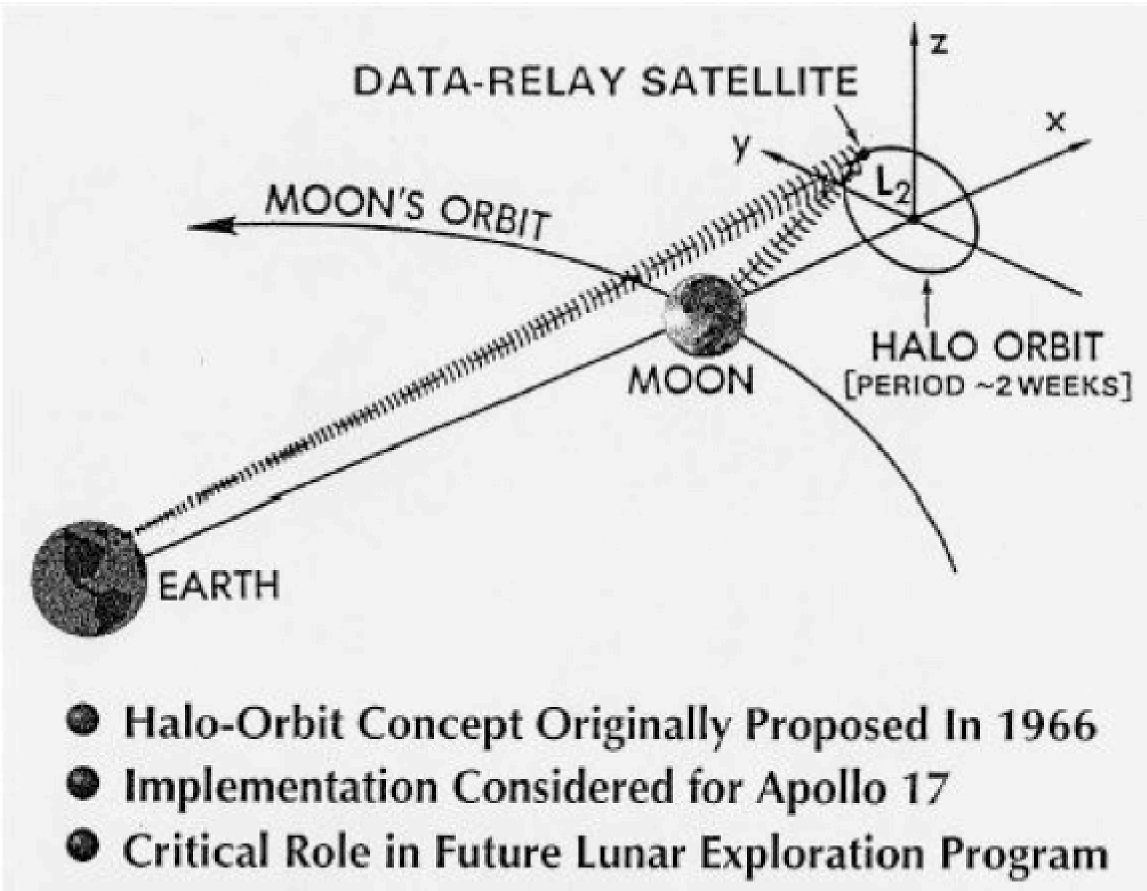
POLITECNICO DI MILANO

Scoperti:

- Lagrange, 1772

Utilizzo:

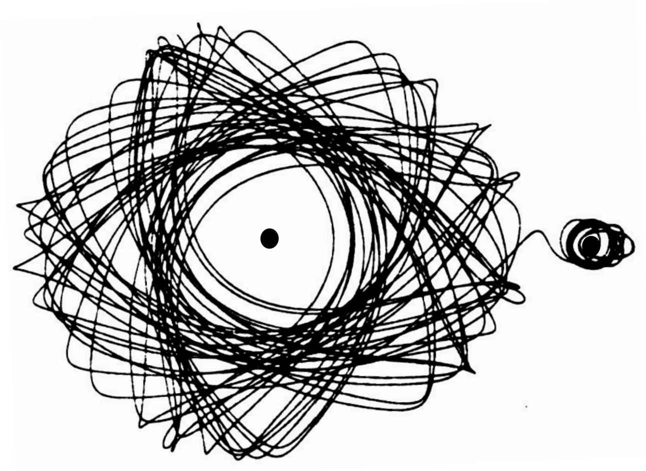
- Colombo, 1960
- Farquhar, 1966



➡ Le orbite non-kepleriane hanno caratteristiche uniche che possono essere utilizzate in scenari innovativi

I trasferimenti a bassa energia

- I trasferimenti a bassa energia emergono in modelli nei quali si tiene conto di due (o più) attrazioni gravitazionali *contemporaneamente* agenti sulla sonda.



- orbite non-kepleriane
- dinamiche caotiche
- sistemi non integrabili
- perdita degli elementi orbitali

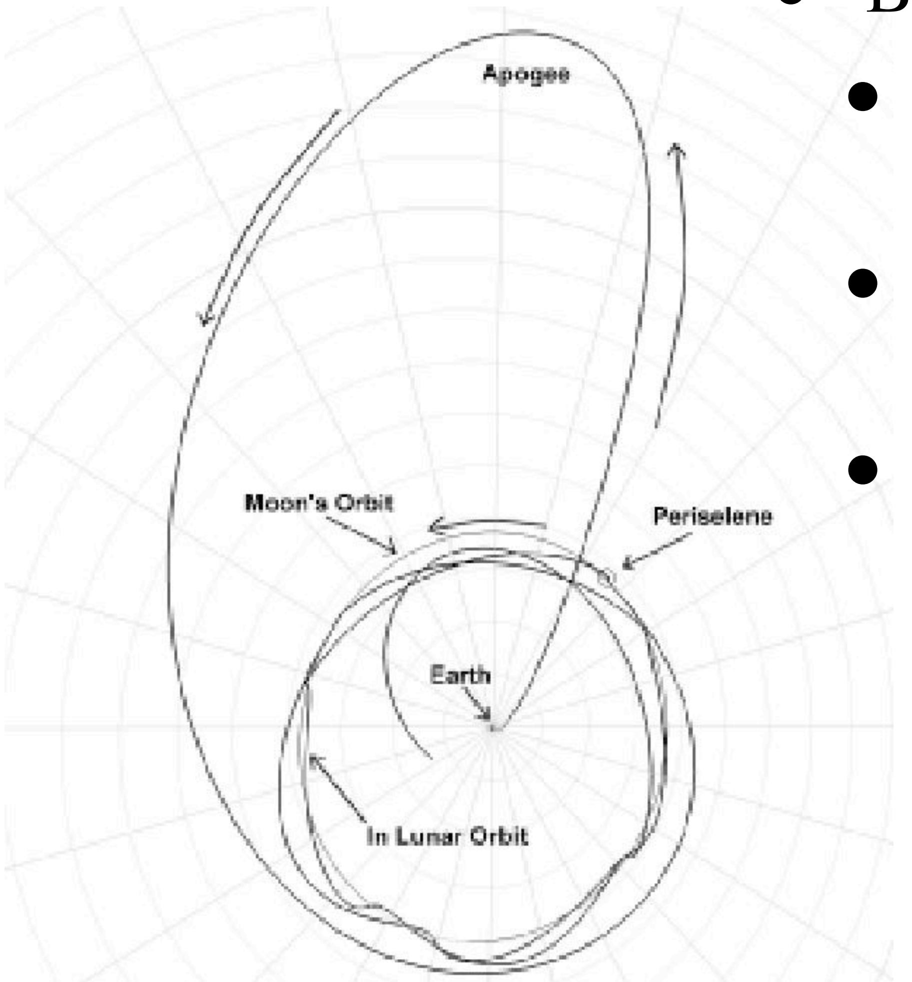
➡ come progettare trasferimenti *low energy*?

approccio *qualitativo*: sfruttare la presenza di punti di equilibrio, orbite periodiche, varietà invarianti, ...

POLITECNICO DI MILANO

Le “weak stability boundaries”

POLITECNICO DI MILANO

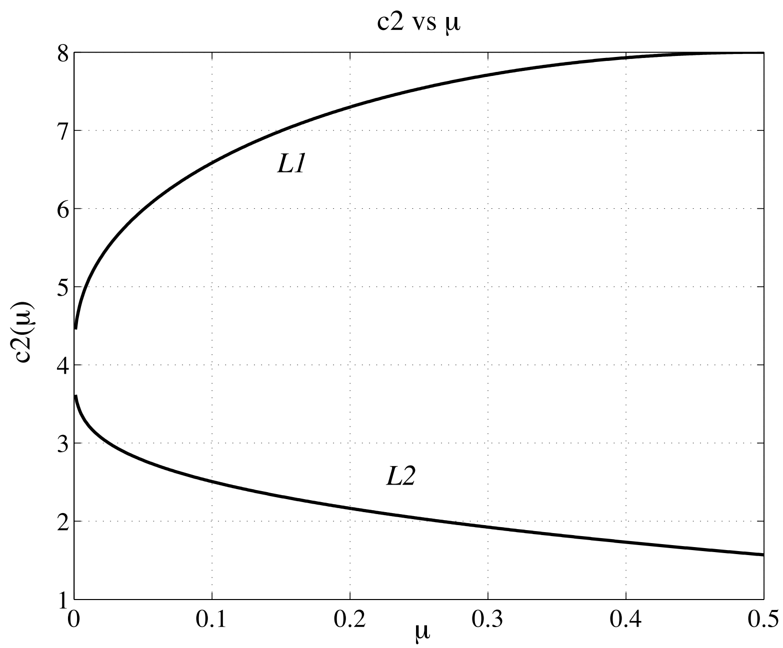


- Belbruno, 1987
  - Trasferimenti Terra-Luna con cattura balistica
  - Arrivo su orbita selenocentrica ellittica
  - Salvataggio della missione giapponese Hiten nel 1991

Linearizzazione intorno a L_1 e L_2

POLITECNICO DI MILANO

Riferimento centrato nel punto d'equilibrio



$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1+2c_2)x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= 0 \\ \ddot{z} + c_2 z &= 0 \end{cases}$$

con $\quad c_2 = c_2(\mu) = \dfrac{\mu}{(1-\mu-l_i)^3} + \dfrac{1-\mu}{(\mu+l_i)^3}$

$l_i = x_{Li}$, $i=1,2$.

A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

Soluzione linearizzata

$$\begin{cases} x(t) &= A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t} + A_x \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) &= -k_1 A_1 e^{\lambda t} + k_1 A_2 e^{-\lambda t} - k_2 A_x \sin(\omega t + \varphi) \\ z(t) &= A_z \cos(\nu t + \psi) \end{cases}$$

Autovalori dello jacobiano

$$\lambda = \sqrt{\frac{c_2 - 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{2 - c_2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}}, \quad \nu = \sqrt{c_2}$$

$$k_1 = \frac{2c_2 + 1 - \lambda^2}{2\lambda}, \qquad k_2 = \frac{2c_2 + 1 + \omega^2}{2\omega}$$

Costanti arbitrarie

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t} + A_x \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) = -k_1 A_1 e^{\lambda t} + k_1 A_2 e^{-\lambda t} - k_2 A_x \sin(\omega t + \varphi) \\ z(t) = A_z \cos(\nu t + \psi) \end{cases}$$

$A_1, A_2, A_x, A_z, \varphi, \psi$ sono costanti arbitrarie associate a soluzioni di diversa natura

in generale $\omega \neq \nu$

$\boxed{A_1, A_2}$ moto stabile e instabile (sella)

$\boxed{A_x, \varphi}$ moto periodico nel piano (centro)

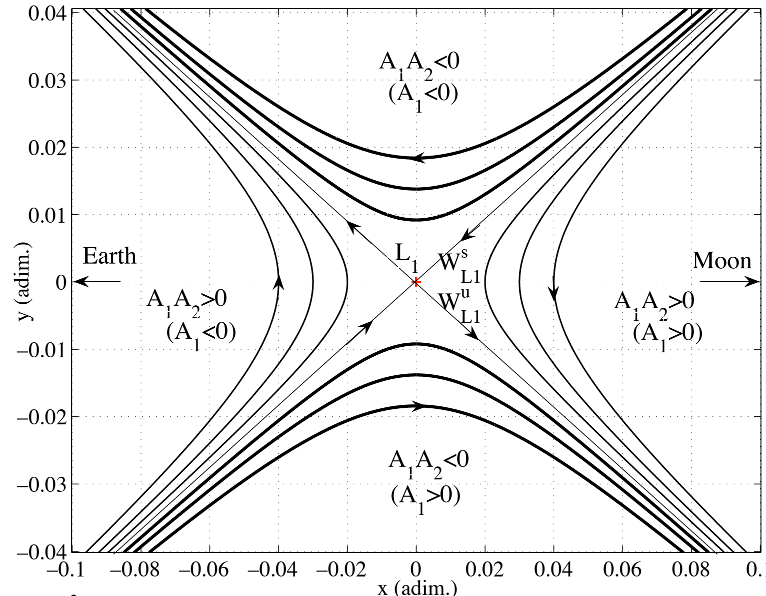
$\boxed{A_z, \psi}$ moto periodico fuori dal piano (centro)

POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento di matematica - 18 aprile 2007

Sella

$$
\begin{cases}
x(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t} \\
y(t) = -k_1 A_1 e^{\lambda t} + k_1 A_2 e^{-\lambda t}
\end{cases}
$$



Orbite iperboliche ($A_1 \neq 0$ e $A_2 \neq 0$)

- orbite di transito ($A_1 A_2 < 0$)
- orbite di non-transito ($A_1 A_2 > 0$)

Varietà invarianti lineari associate ai punti

- E^s_{Li}, varietà stabile ($A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$)
- E^u_{Li}, varietà instabile ($A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$)

Le varietà invarianti associate ai punti possono essere sfruttate per applicazioni spaziali

Varietà invarianti (punti)

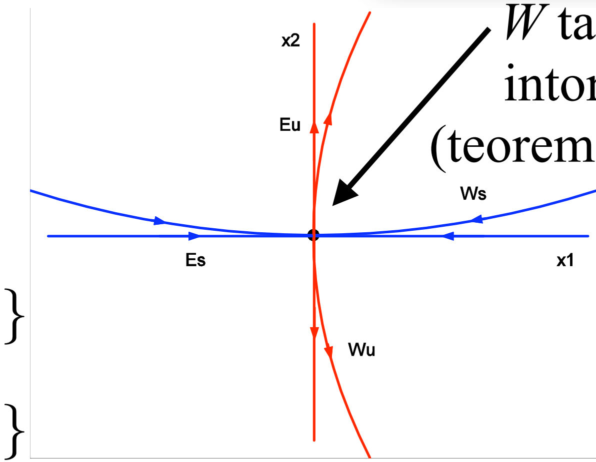
POLITECNICO DI MILANO

Varietà invarianti: linee *1D*, nello spazio delle fasi, tali che

$$W^s_{L_i} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 | \mathbf{x}(t) \to L_i, t \to +\infty\}$$

$$W^u_{L_i} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 | \mathbf{x}(t) \to L_i, t \to -\infty\}$$

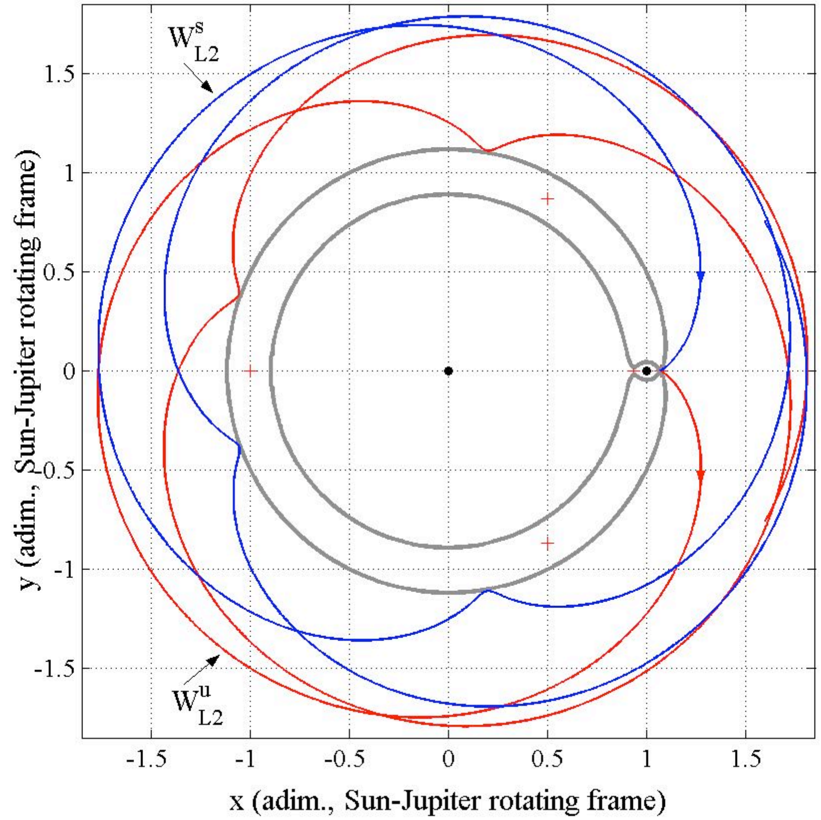
W tangente ad *E* intorno al punto (teorema di Hartmann)



Sistema Sole-Giove

$W^S{}_{L2}$ (blu)
$W^U{}_{L2}$ (rosso)

Le due varietà *1D* si estendono fino a *3 UA* oltre l'orbita di Giove.



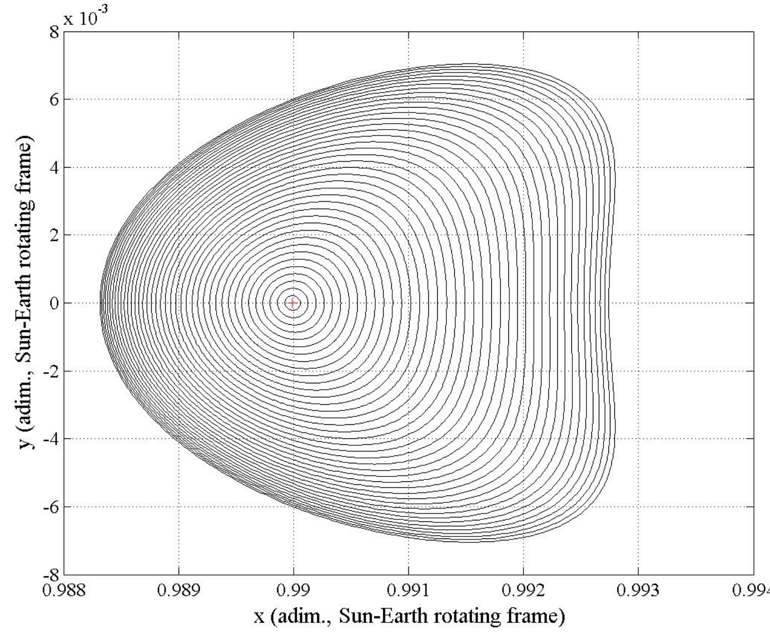
Dipartimento di matematica - 18 aprile 2007

Orbite di Lyapunov

POLITECNICO DI MILANO

Nel piano (*x*,*y*)

$$\begin{cases} x(t) &= A_x \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) &= -k_2 A_x \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



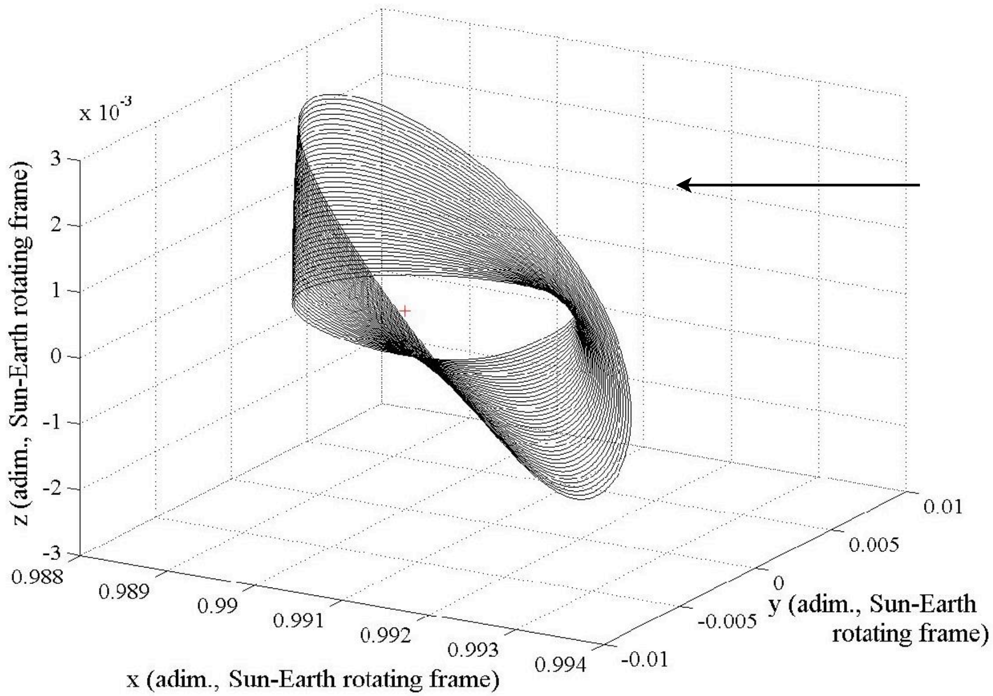
Orbite Lyapunov infinitesime possono essere continuate fino ad ottenere orbite di dimensione finita

Queste orbite sono di scarsa utilità pratica (per applicazioni spaziali è utile il moto fuori dal piano)

A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

Orbite halo

- Ampie orbite periodiche 3D
- $\omega = \nu$, ottenute *forzando* i termini di ordine superiore
- Adatte a molte missioni (ampie escursioni fuori dal piano)
- Ottenute per via semi-analitica



Famiglia di orbite halo intorno a L_1 del sistema Sole-Terra

POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento di matematica - 18 aprile 2007

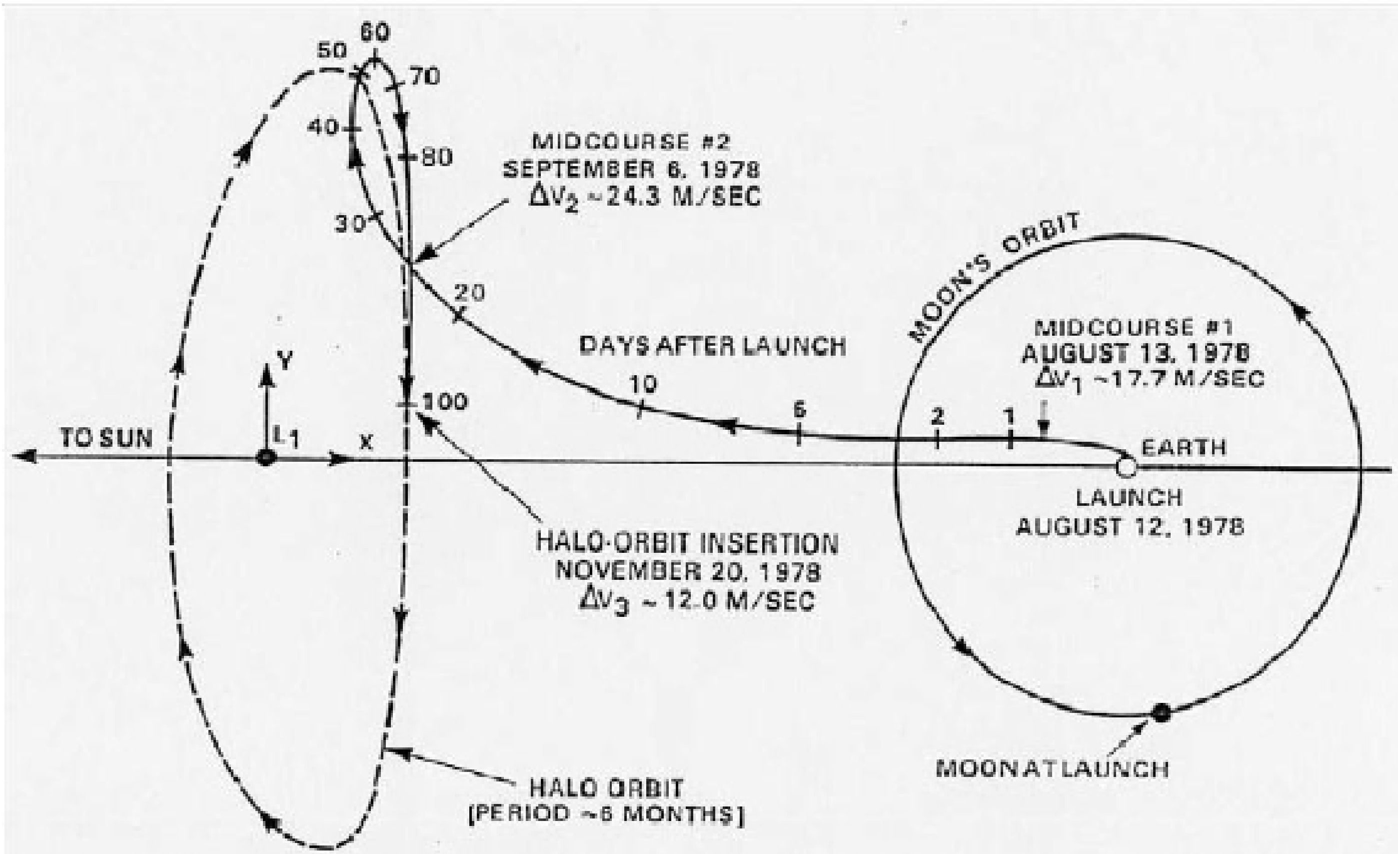
A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

La prima missione

POLITECNICO DI MILANO

ISEE-3, 1978

Scopo: monitorare l'interazione tra il vento solare e il campo gravitazionale terrestre fuori dalle fasce di Van Allen



A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

Varietà invarianti (orbite)

POLITECNICO DI MILANO

- Esistono anche varietà invarianti associate alle orbite periodiche
- Queste varietà sono "oggetti" più complicati delle semplici varietà associate ai punti

Varietà *2D,* nello spazio delle fasi, definiti come:

Varietà stabile

$$W^s_{L_i,p.o.} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 | \mathbf{x}(t) \rightarrow p.o., t \rightarrow +\infty\}$$

Varietà instabile

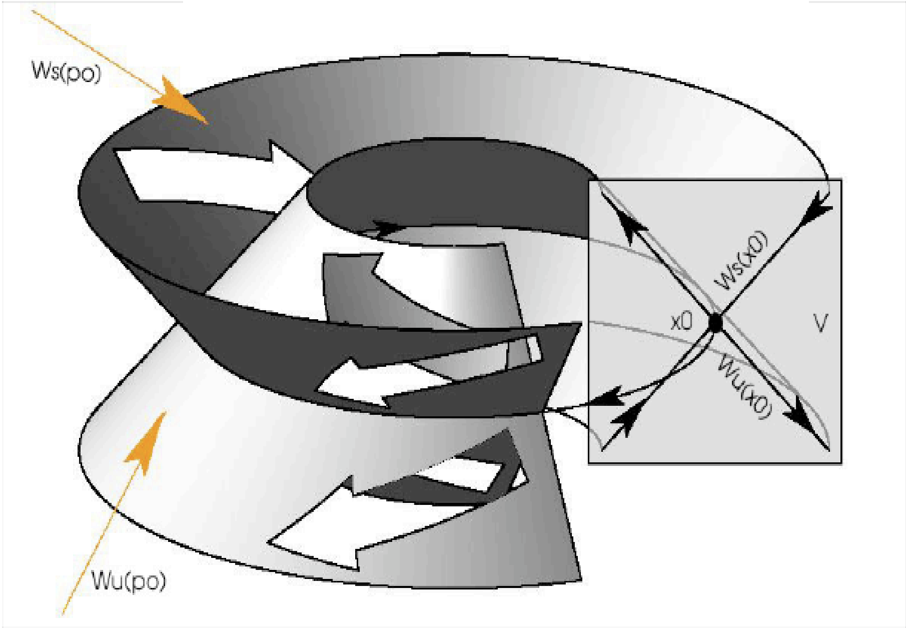
$$W^u_{L_i,p.o.} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 | \mathbf{x}(t) \rightarrow p.o., t \rightarrow -\infty\}$$

Varietà invarianti (orbite)

POLITECNICO DI MILANO

$W^s{}_{Lip.o.}$ e $W^u{}_{Lip.o.}$ possono essere viste come le varietà associate ad un punto di equilibrio di una mappa di Poincarè

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_0 + M(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$



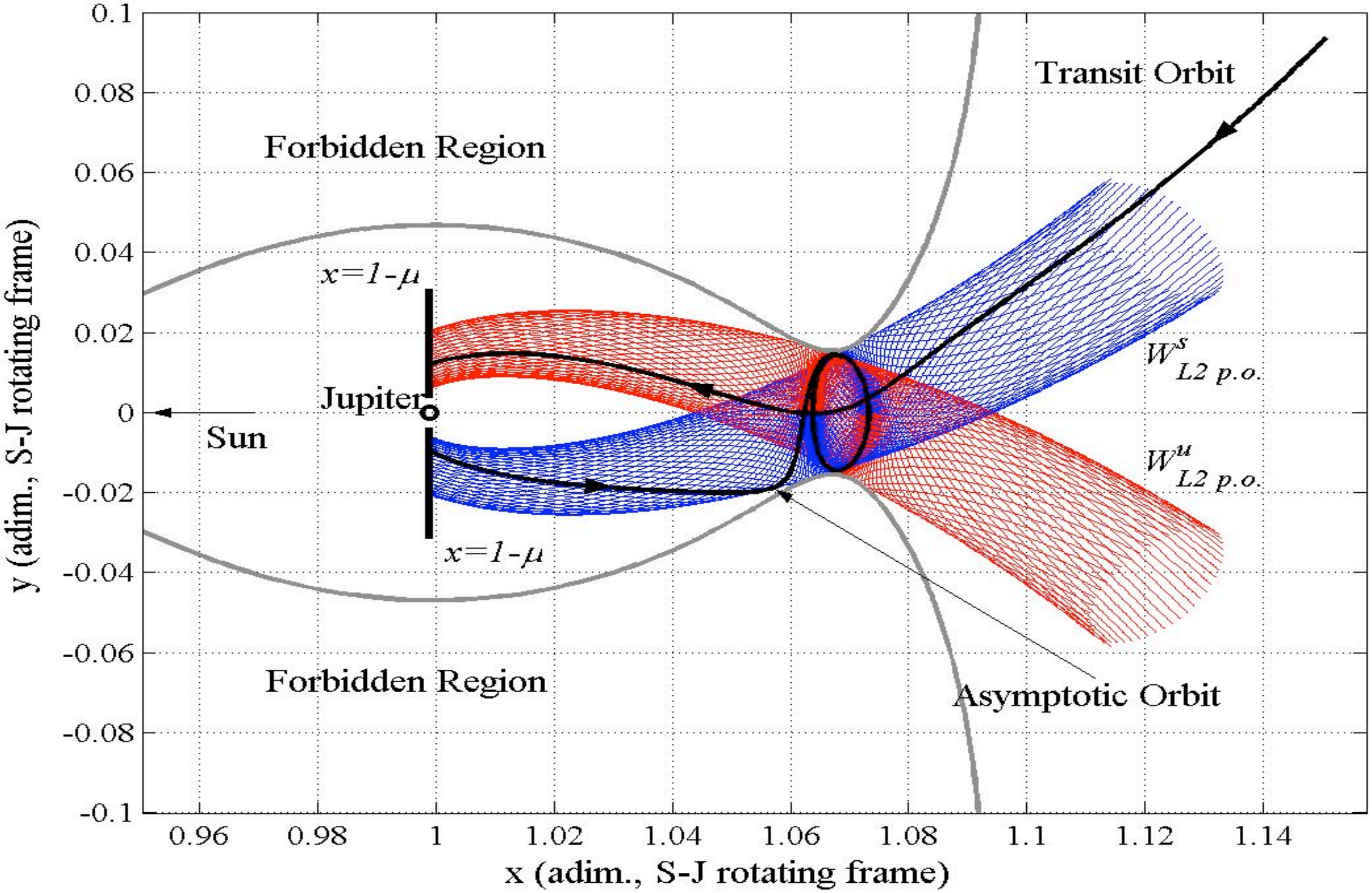
Associate agli autovalori stabili e instabili dell'operatore di monodromia *M,* associato all'orbita periodica.

A. Finzi e F. Topputo, Politecnico di Milano

Varietà invarianti: esempio

POLITECNICO DI MILANO

Sistema Sole-Giove
Orbita di Lyapunov intorno a L2
blu: $W^s_{L2p.o.}$, rosso: $W^u_{L2p.o.}$

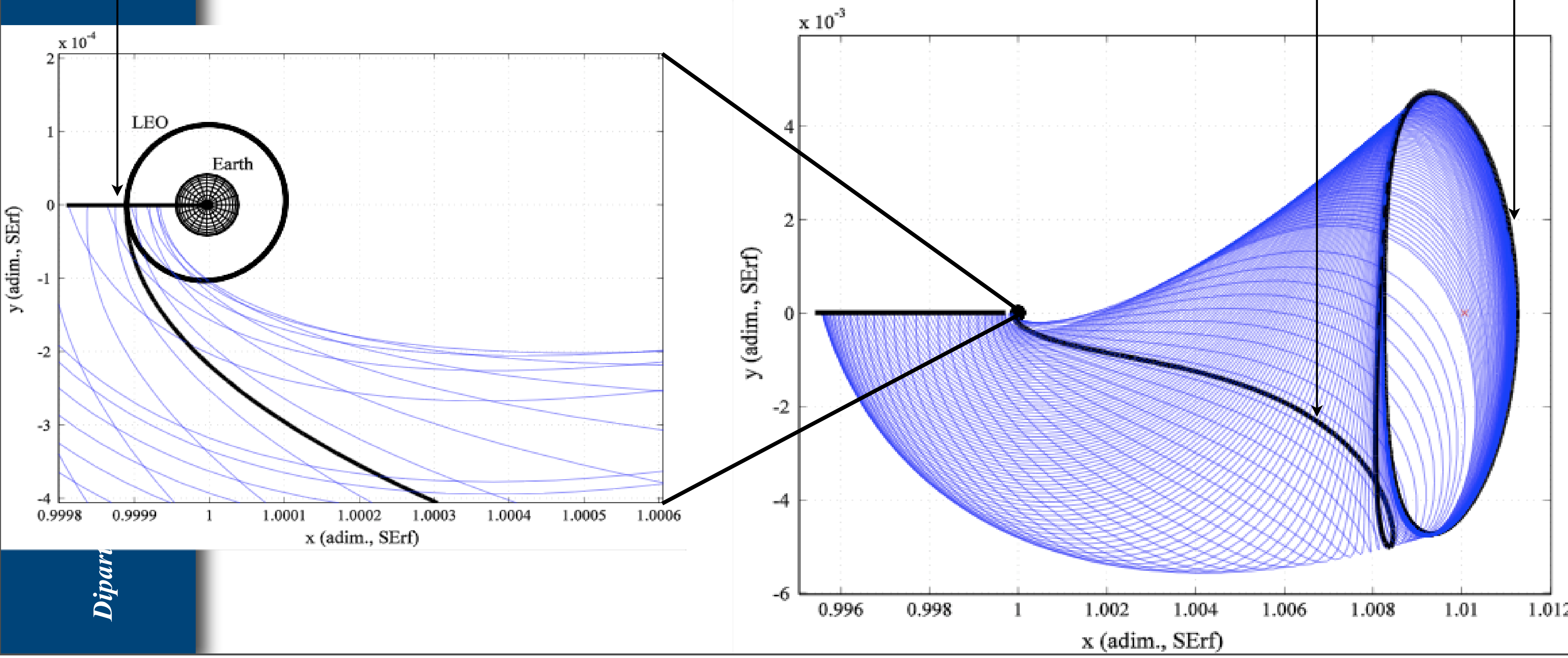


no

POLITECNICO DI MILANO

“Libration point missions”

- Le orbite asintotiche (stabili) possono essere sfruttate
- Se lo scopo è orbitare un punto di equlibrio (e.g. L_2 Sole-Terra)
  - “posizionare” il satellite sulla varietà stabile dell’orbita
  - il satellite tende spontaneamente all’orbita finale
  - una piccola manovra è necessaria per l’inserzione sulla halo



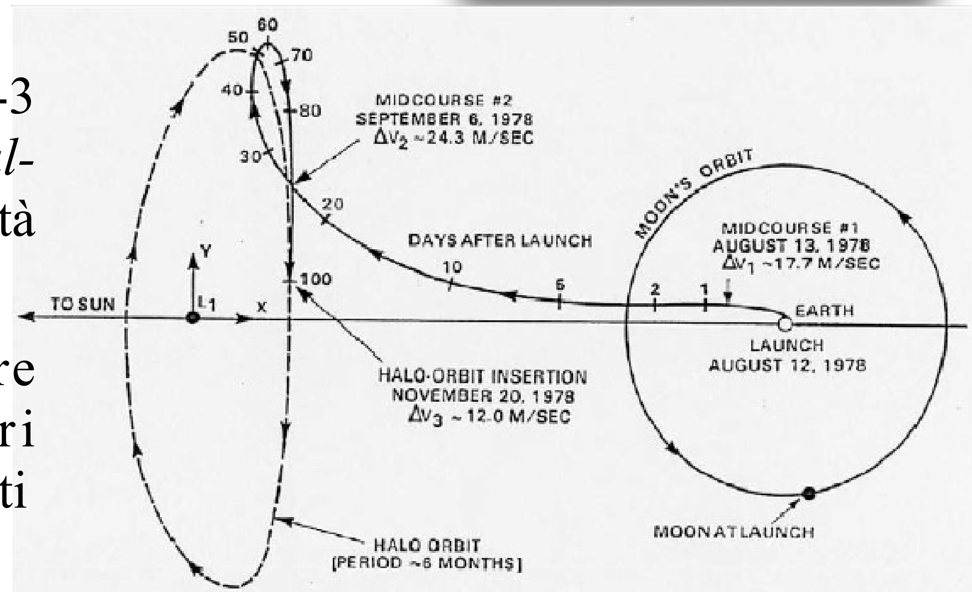
Dipar

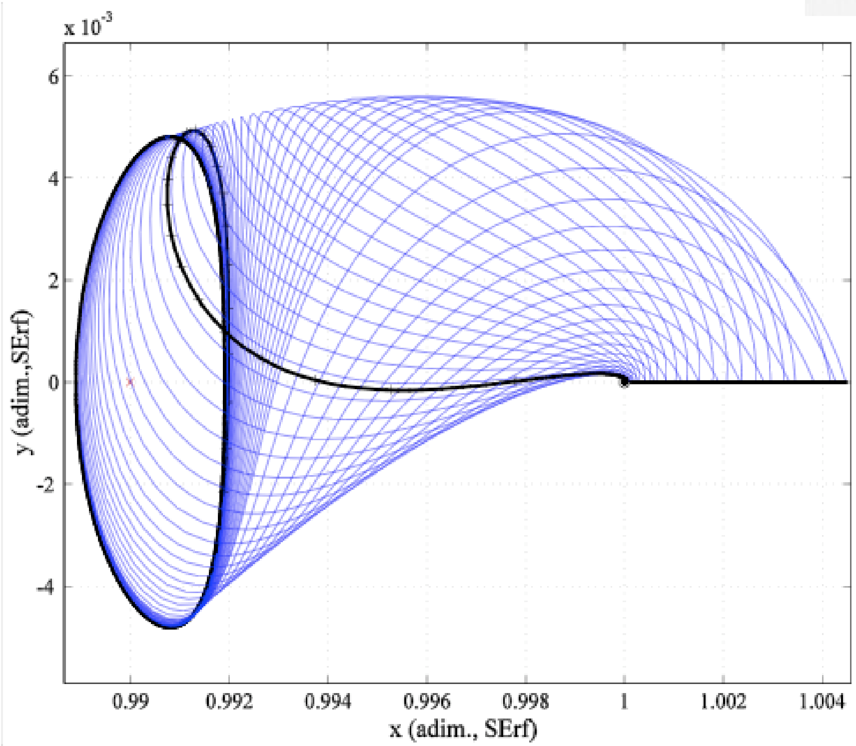
POLITECNICO DI MILANO

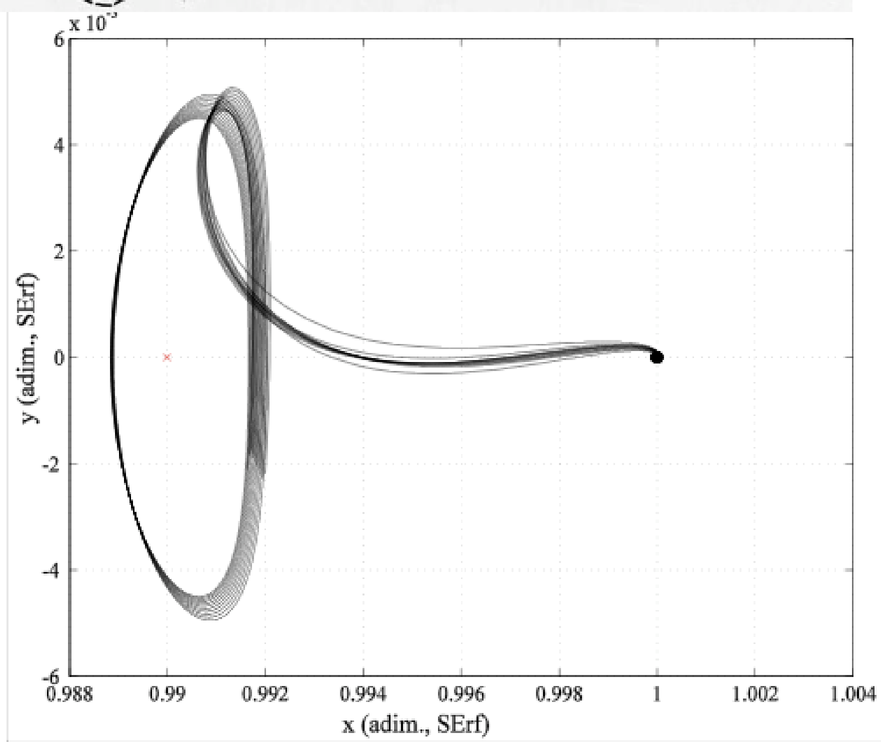
Dipartimento di matematica - 18 aprile 2007

La missione ISEE-3

- Nel 1978 la traiettoria di ISEE-3 fu progettata con metodi *trial-and-error* (il concetto di varietà stabile non era stato introdotto)
- la traiettoria può essere giustificata a posteriori nell'ottica delle varietà invarianti

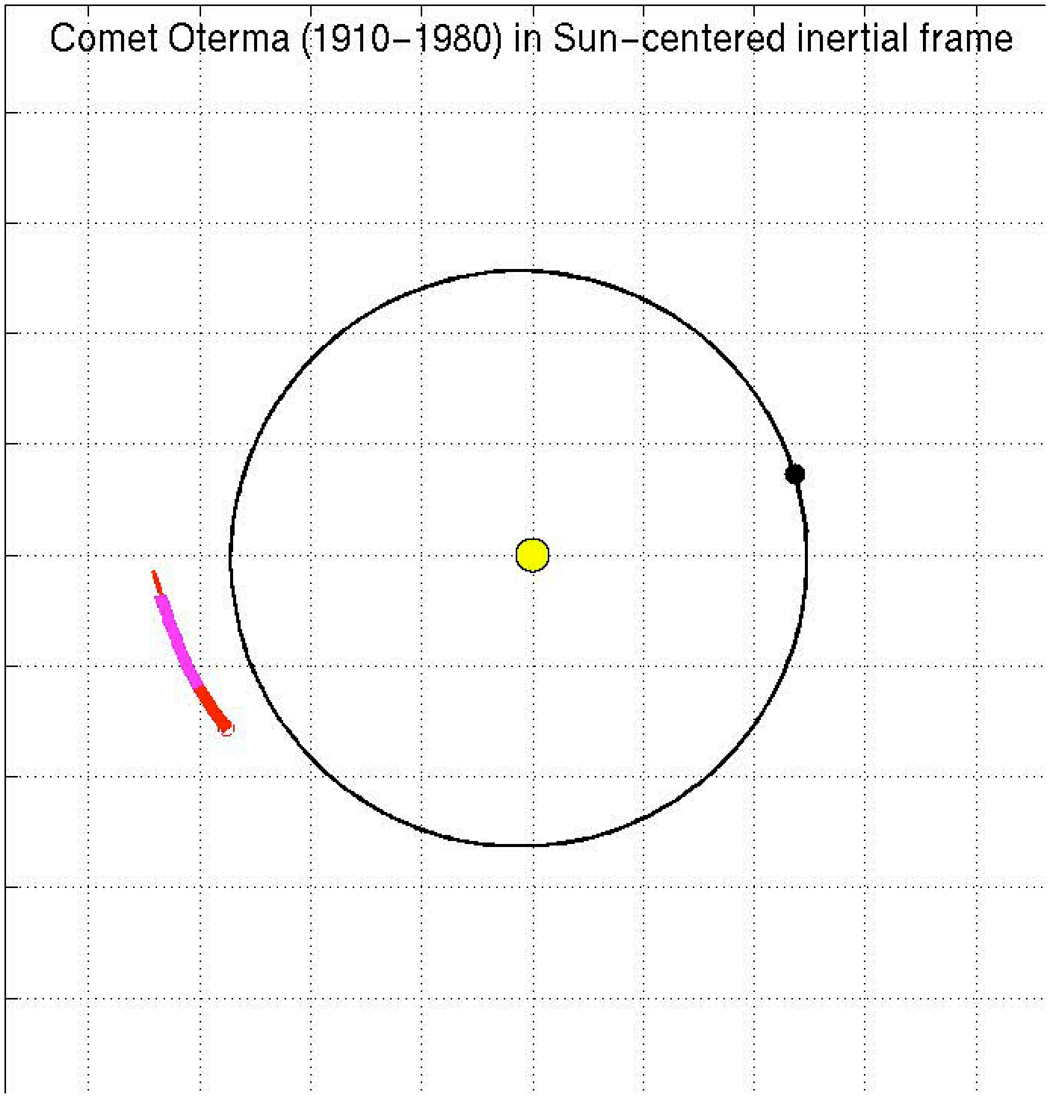






Orbite risonanti

Ottenute con oppurtune condizioni iniziali



“Resonance transition”

POLITECNICO DI MILANO

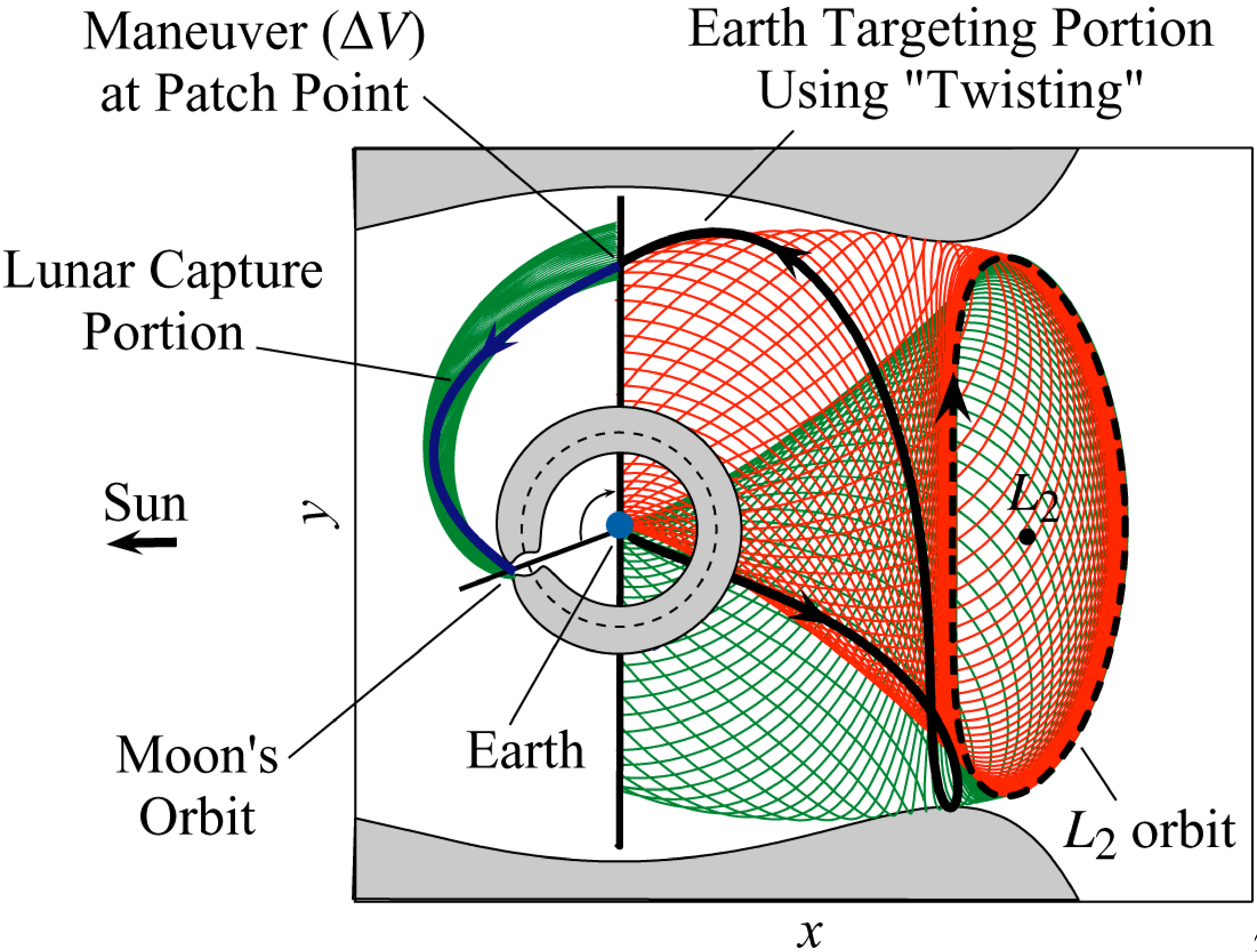
- orbite risonanti del tipo p:q, $pT_C = qT_J$
- la cometa orbita il Sole p volte in corrispondenza di q rivoluzioni di Giove

- La cometa Oterma effettua un salto di risonanza
- 2:3 $\Rightarrow$ 3:2
- transita attraverso le varietà stabili e instabili delle orbite di Lyapunov intorno a L_1 e L_2

La tecnica delle varietà invarianti

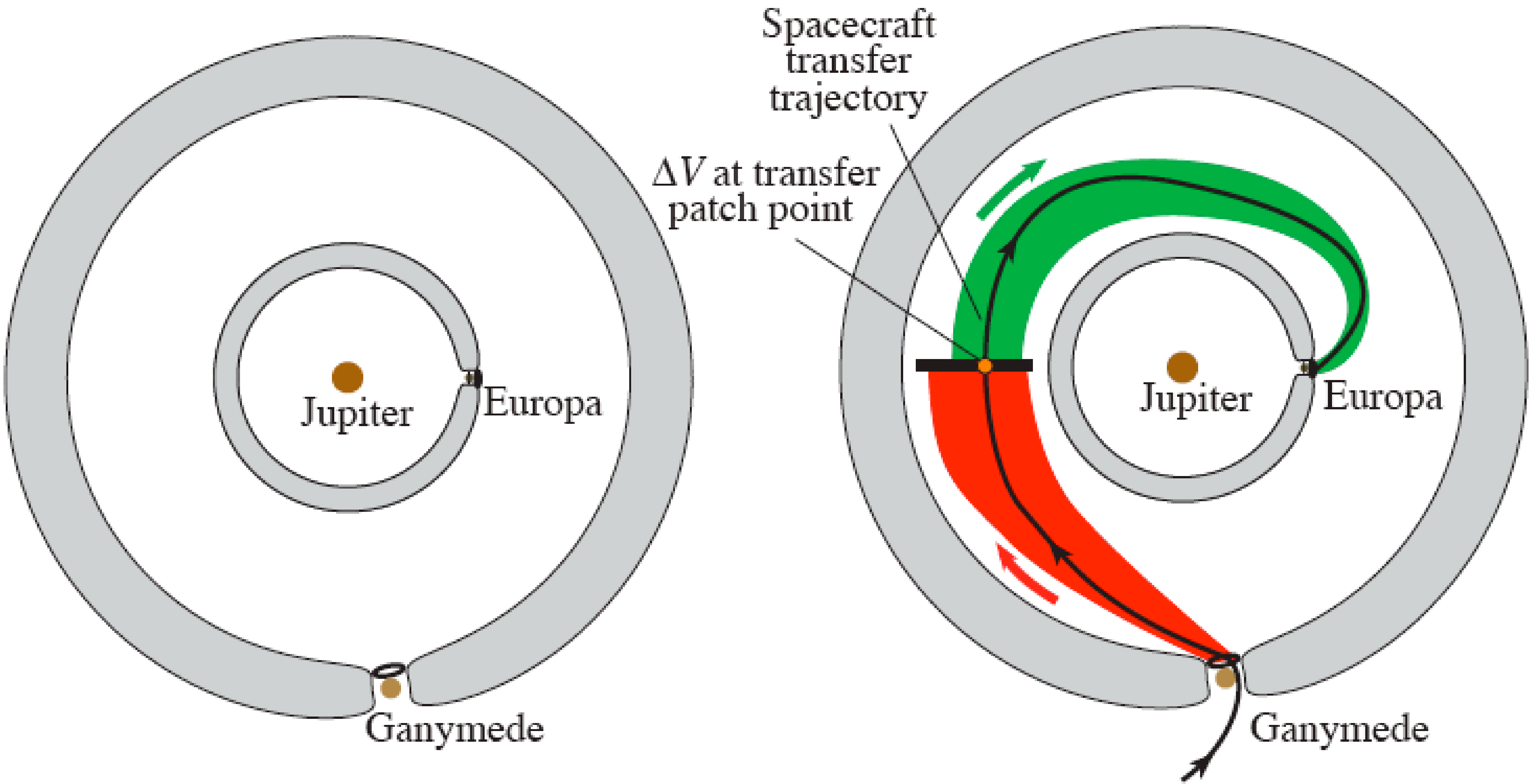
POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento di matematica - 18 aprile 2007



Tour delle lune di Giove

- La tecnica delle varietà può essere usata per progettare un tour delle lune di Giove
- Esempio: tour di Ganymede e Europa

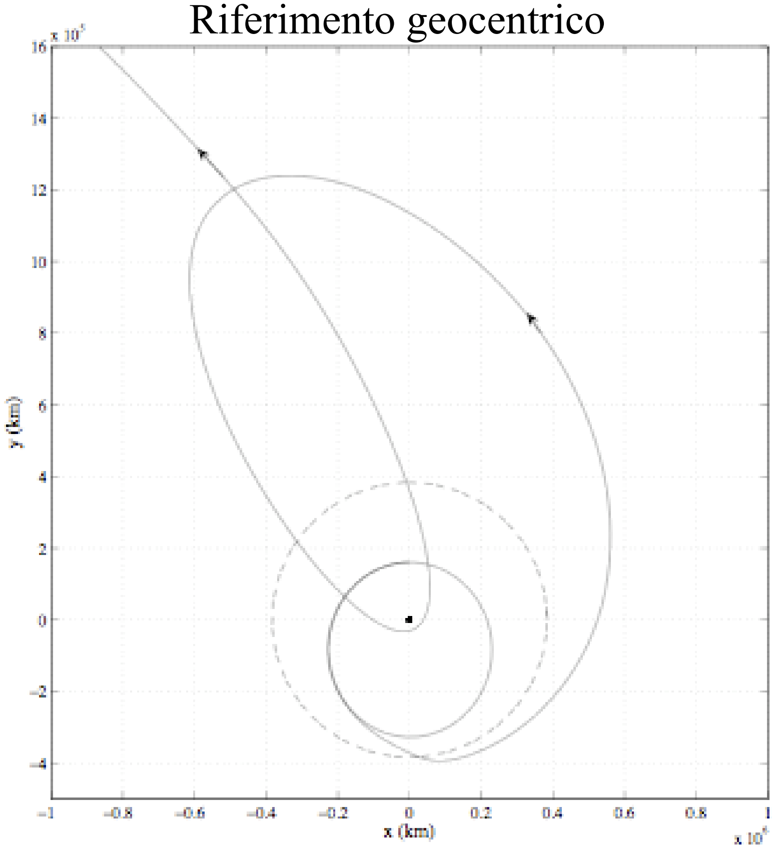


ano

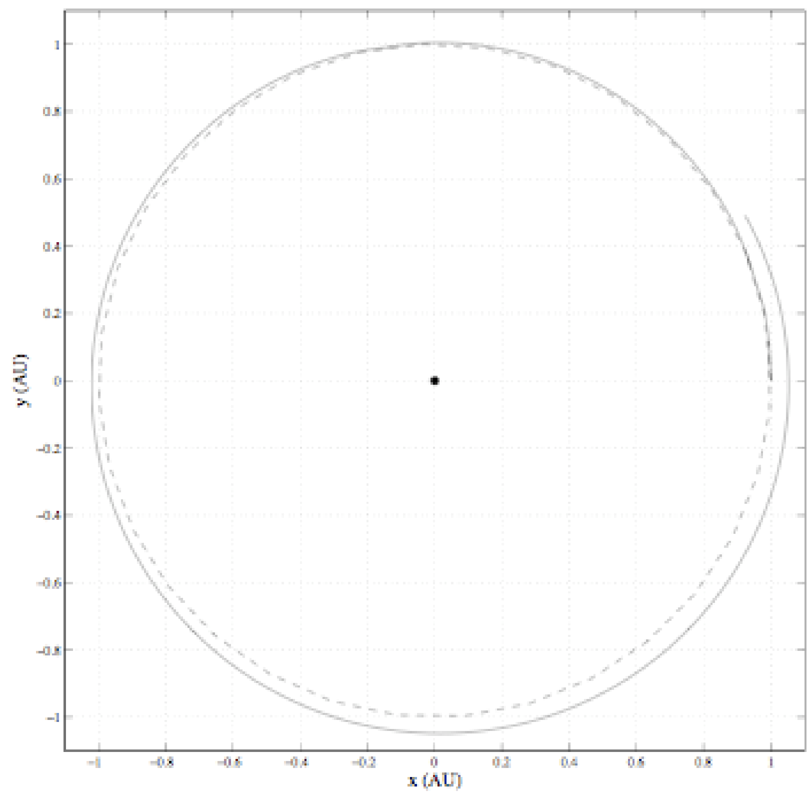
Fuga balistica - 4 corpi

- Si tiene conto della perturbazione del Sole (problema dei quattro corpi: Sole-Terra-Luna-satellite)
- Se il satellite è inizializzato su un'orbita 2:1 risonante con la Luna, in luogo del salto di risonanza, si ha la fuga balistica: il satellite abbandona dal sistema Terra-Luna
- La fuga avviene a costo nullo

Riferimento geocentrico



Riferimento eliocentrico



POLITECNICO DI MILANO

Conclusioni

Le dinamiche a *n* corpi danno origine ad orbite non-Kepleriane che possono essere sfruttate per

- ottenere caratteristiche *uniche* nell'ambito di scenari innovativi
- progettare trasferimenti a basso costo per ridurre le masse di propellente
- ottenere soluzioni già rifinite pur in un contesto preliminare

... ma ...

- tempi di trasferimento elevati
- traiettorie altamente nonlineari (dinamiche caotiche)
- mancanza di soluzioni analitiche (problemi non integrabili)

Riferimenti ...

- V. Szebehely, *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*, Academinc Press Inc., 1967
- C.C. Conley, *Low Energy Transit Orbits in the Restricted Three-Body Problems*, SIAM Journal on Applied Mathematics,1968
- R. W. Farquhar, *Lunar Communications with Libration Point Satellite*, Journal of Spacecraft and Rockets, 1967
- D.L. Richardson, *Analytic Construction of Periodic Orbits about the Collinear Points*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1980
- E. Belbruno and J. Miller, *Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1993
- R. Thurman and P. Worfolk, *The Geometry of Halo Orbits in the Circular Restricted Three-Body Problem*, Geometry Center Research Report, 1996
- K. Howell, B.T. Barden, and M.W. Lo, *Application of Dynamical System Theory to Trajectory Design for Libration Point Missions*, The Journal of the Astronautical Sciences, 1997
- W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden, and S.D. Ross, *Heteroclinic Connections between Periodic Orbits and Resonance Transition in Celestial Mechanics*, Chaos, 2000

... riferimenti

- J. Schoenmaekers, D. Horas, and J.A. Pulido, *SMART-1: With Solar Electric Propulsion to the Moon*, 16th Int. Symposium on Space Flight Dynamics, 2001
- G. Gòmez, J. Masdemont, and J.M. Mondelo, *Libration Point Orbits: A Survey from the Dynamical Point of View*, Libration Point Orbits and Application Conference, 2002
- E. Belbruno, *Capture Dynamics and Chaotic Motion in Celestial Mechanics*, Princeton University Press, 2004
- F. Bernelli-Zazzera, F. Topputo, and M. Massari, *Assessment of Mission Design Including Utilization of Libration Point and Weak Stability Boundaries*, ESA/ESTEC Contract, 2004
- F. Topputo, M. Vasile, and F. Bernelli Zazzera, *Low Energy Interplanetary Transfers Exploiting Invariant Manifolds of the Restricted Three-Body Problem*, The Journal of the Astronautical Sciences, 2005
- F. Topputo, M. Vasile, and F. Bernelli Zazzera, *Earth-to-Moon Low Energy Transfers Targeting L_1 Hyperbolic Transit Orbits*, Annals of the New York Academy of Sciences, 2005