From: Gottfried.W.Leibniz@cielodelsole.par
To: Onduli_acritici.codini_urticali.ricciuti,ladino!@cranio_lucidi.it
Object: Equazioni degli inviluppi

Caro Epsi,
eccoti le equazioni dei diversi inviluppi che abbiamo incontrato durante la chat.

Inviluppi di rette:

Figura	Tangenti	Inviluppo
Circonferenza	$x \cos t + y \sin t = 1$	$x^2 + y^2 = 1$
Parabola standard	$y = 2\,t\,x - t^2$	$y = x^2$
Parabola tangente agli assi	$bxt + ay(1 - t) = ab(t - t^2)$	$(bx - ay)^2 + a^2 b^2 = 2ab(bx + ay)$
Astroide	$x \cos t + y \sin t = \sin t \cos t$	$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Inviluppi di curve:

Figura	Curve	Inviluppo
Cono di Mach	$(x - v\,t)^2 + y^2 = c^2 t^2$	$x^2 = (M^2 - 1)\,y^2$ con $M = v/c > 1$
Parabola di sicurezza	$y = x \tan\alpha - \dfrac{x^2}{4h\cos^2\alpha}$	$y = h - \dfrac{x^2}{4h}$
Lamina d'acqua	$y = H - h - \dfrac{x^2}{4h}$	$y = H - x$

Ora ti spiego come si ottengono. Per ottenere l'inviluppo di una famiglia di curve qualsiasi, definite nel piano dall'equazione in forma implicita $f(x, y, t) = 0$, ti basta annullare, oltre a f, anche la derivata della funzione f rispetto a t, come se x e y fossero delle costanti, e quindi eliminare il parametro t tra queste due equazioni.

Prendi il primo esempio riportato: le rette di equazione $x \cos t + y \sin t = 1$, al variare del parametro t.

Deriva (ti ricordo che la variabile è t, quindi x e y le devi considerare come costanti) e ottieni l'equazione $-x \sin t + y \cos t = 0$. A questo punto per eliminare il parametro t ti conviene prima risolvere il sistema in x e y, ottenendo $x = \cos t$ e $y = \sin t$, e quindi sostituire queste due espressioni nella prima equazione in modo da eliminare t e ottenere: $x^2 + y^2 = 1$.

Così puoi fare in tutti gli altri casi, se non hai difficoltà nei calcoli algebrici.

Buon lavoro!

Tuo
Fried