Da: ……
Data: Sab, Aprile 10, 2004 15:05
A: claudio.citrini@polimi.it

Egregio Prof. Citrini,

mi congratulo per il bellissimo libro "Da Pitagora a Borges" che ho letto con gioia come da tempo non mi accadeva. ……

Infine gradirei un suo commento sul seguente limite:

[sin(tanx)-tan(sinx)]/[arcsin(arctanx)-arctan(arcsinx)]

per x tendente a zero. Ho letto che Newton e Leibniz con metodi geometrici avrebbero trovato il risultato in un minuto, mentre i metodi analitici preferiti dai moderni richiedono non meno di un'ora. Io ho gettato la spugna dopo venti minuti di utilizzo dei polinomi di Taylor. Il software Mathematica dà 1 come risultato, mentre Derive arranca. Ha idea di come avrebbero fatto Mela e Fried?

Grazie e cordialissimi saluti

……

====

Il riferimento è al limite proposto alla pag. 28 di [Arnol'd, 1989]: Arnol'd V.I., *Huygens & Barrow, Newton & Hooke*, Boringhieri, Torino 1996

====

Caro ……,

rispondo volentieri al suo messaggio per i-mail. Innanzitutto la ringrazio di avermi trasmesso il suo apprezzamento per il libro, e sono lieto se la sua lettura le ha arrecato piacere. …

Il limite di cui mi chiede notizia ha tormentato anche me per qualche tempo. Prima di guardare la soluzione proposta da Arnol'd ho tentato di calcolarlo a mano ma ho rinunciato anch'io. Il calcolo è troppo lungo per non rischiare un erroretto! Anche a me inoltre Derive ha dato dei problemi, perché non riesce a sviluppare ATAN(ASIN(X)) fino al 7° grado, che è quello che serve. Basta però sostituire ad ASIN(X) il suo polinomio di Taylor di 7° grado e Derive calcola speditamente anche questo sviluppo. Eseguite le sottrazioni, numeratore e denominatore risultano asintotici a $x^7/30$, da cui il limite 1. Le posso mandare il file, ma lo può ovviamente ricostruire lei stesso, con questo accorgimento.

A quel punto ho guardato la soluzione riportata nelle note, e ho capito che la risposta "facile" che Arnol'd attribuisce a Mela e Fried non riposava sugli sviluppi di Taylor, come il contesto mi (ci) aveva indotto a pensare, ma su una proprietà più specifica delle funzioni in gioco. Si tratta infatti di una coppia di funzioni e delle loro inverse, tutte asintotiche a x. La (sintetica) dimostrazione geometrica proposta lascia qualche dubbio e comunque non mi pare così intuitiva, ma si vede che la struttura del limite è $\lim [f(x) – g(x)] / [g^{-1}(x) – f^{-1}(x)]$, della forma 0/0.

Applicando la regola di de L'Hospital e – un po' alla garibaldina – il teorema di derivazione delle funzioni inverse si ha subito che il limite è uguale a

$\lim [f'(x) – g'(x)]/ [1/g'(x) – 1/f'(x)] = \lim [f'(x) \cdot g'(x)] = 1$.

Cordiali saluti

Claudio Citrini