From: Augustin.Louis.Cauchy@primacornice.purg
To: Aduli_criticoni.lunatici,idrico!@incroci_laudi.it
Object: Coordinate omogenee

Carissimo,

eccoti le formule per scrivere le retta per due punti in coordinate omogenee.

Considera i punti P e Q di coordinate omogenee $[p_1 , p_2 , p_3]$ e $[q_1 , q_2 , q_3]$; ricorda che P e Q sono distinti se le terne $[p_1 , p_2 , p_3]$ e $[q_1 , q_2 , q_3]$ non sono proporzionali.

Allora la retta PQ ha equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, ove i tre coefficienti $c = p_1q_2 - p_2q_1$, $a = p_2q_3 - p_3q_2$, $b = p_3q_1 - p_1q_3$ non sono contemporaneamente nulli. Al solito, a, b, c sono definiti a meno di una costante di proporzionalità non nulla.

Puoi fare la verifica, se vuoi, ma se conosci la teoria dei sistemi lineari la condizione per cui il sistema $\begin{cases} ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0 \\ aq_1 + bq_2 + cq_3 = 0 \end{cases}$ (che ha come incognite i coefficienti a, b, c) ammette una semplice infinità di soluzioni proporzionali (che dunque rappresentano la stessa retta) è proprio che P e Q siano distinti. Altrimenti le due equazioni sono equivalenti, e vi è una duplice infinità di soluzioni, corrispondente a una infinità di rette (quelle che passano per il punto P = Q). Le soluzioni sono quelle indicate, proporzionali ai minori estratti dalla matrice dei coefficienti. Se preferisci, puoi dire direttamente che la retta si scrive come $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0$… gira e rigira, è sempre la stessa cosa!

.

In particolare se $p_3 = q_3 = 0$ i punti P e Q sono entrambi impropri e trovi $a = b = 0$, $c \neq 0$, cioè la retta impropria $x_3 = 0$; se invece $p_3 = 1$, e quindi il punto P è il punto ordinario di coordinate cartesiane (p_1 , p_2), mentre $Q = [1, m, 0]$ è il punto all'infinito della retta $y = mx$, trovi $c = mp_1 - p_2$, $a = -m$, $b = 1$, per cui hai $-m\, x_1 + x_2 + (mp_1 - p_2)\, x_3 = 0$, equivalente alla nota formula $y - p_2 = m(x - p_1)$ della retta passante per un punto e con determinato coefficiente angolare, eccetera.

Ed ecco i calcoli per i punti all'infinito dell'iperbole.

Interseca la retta $bx_1 - ax_1 + cx_3 = 0$ con la tua iperbole $b^2x_1^2 - a^2x_2^2 = a^2b^2x_3^2$. Spezza così: $(bx_1 - ax_2)(bx_1 + ax_2) = a^2b^2x_3^2$, di modo che ti sia immediato sostituire $bx_1 - ax_2 = -cx_3$ e ottenere $-cx_3(bx_1 + ax_2) = a^2b^2x_3^2$. Così vedi bene: $x_3 = 0$ dà una prima radice $[a, b, 0]$ che è sempre all'infinito; semplificando poi per x_3 hai $-c(bx_1 + ax_2) = a^2b^2x_3$. Se vuoi che questa equazione abbia ancora la stessa soluzione $[a, b, 0]$ hai: $-2abc = 0$. Siccome a e b sono diversi da zero, deve essere $c = 0$.

Ti faccio un altro esempio più complicato, per farti capire che la tecnica funziona sempre. Prendi la curva di equazione cartesiana

$4x^2 + 4xy - 3y^2 - 2x + 5y - 5 = 0$, ovvero, in omogenee,

$4x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 - 2x_1x_3 + 5x_2x_3 - 5x_3^2 = 0$.

Taglia con la retta impropria e hai $4x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$, che si spezza in $(2x_1 - x_2)(2x_1 + 3x_2) = 0$. Questo ti dice che la curva era un'iperbole, e che gli asintoti corrispondono ai punti impropri $[1, 2, 0]$ e $[3, -2, 0]$, cioè alle direzioni $m = 2$ e $m = -2/3$.

Potevi arrivarci direttamente prendendo l'equazione di partenza, buttando via i termini di grado minore di 2 e ponendo $y = mx$. Ottenevi l'equazione $-3m^2 + 4m + 4 = 0$, che appunto ti dà le due direzioni trovate. Come vedi, le coordinate omogenee possono essere bypassate con un po' di esperienza. Sostituisci ora per esempio $y = 2x + q$ ed hai che i termini di secondo grado se ne vanno (se no $m = 2$ non sarebbe stato radice dell'equazione ora scritta), e rimane $4xq - 12xq - 3q^2 - 2x + 10x + 5q - 5 = 0$, cioè $(8-8q)x - 3q^2 + 5q - 5 = 0$. Questa si abbassa di grado (diventa impossibile) per $q = 1$: ecco dunque che il tuo asintoto ha equazione $y = 2x+1$, perché tagliando con esso hai due soluzioni "all'infinito".

Analogamente troveresti che l'altro asintoto ha equazione $2x+3y-2=0$. Intersecando i due asintoti trovi il centro.

Ci sono dei trucchi anche più semplici per ottenere questi risultati, ma richiedono dei concetti un po' più sofisticati (se non vuoi solo il ricettario), quindi per ora mi fermo qui.

Tuo
Delta