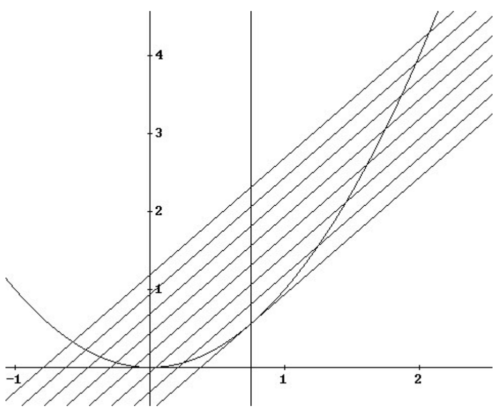
From: Archimedes.Syracusanus@nobilecastello.inf
To: Lunatico_ridici.accordi_inutili@cruciali_nodi.it
Object: Quadratura della parabola

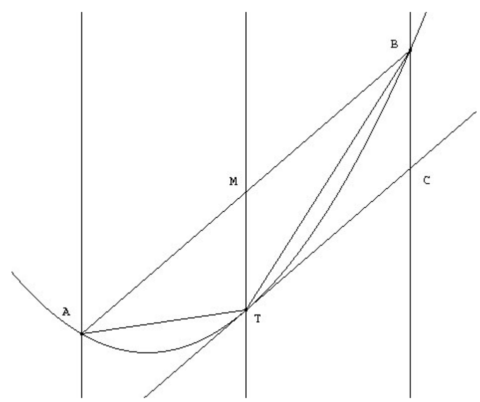
Caro Epsi,
mi poni il quesito di come raccontare la quadratura della parabola a degli studenti di liceo.

Per conto mio se vuoi proporre i miei calcoli in modo semplice devi usare una giusta mescolanza di geometria analitica e sintetica. Per semplificare gli enunciati, ti ricordo che modernamente chiamate diametro di una parabola una qualsiasi parallela all'asse della parabola (il usavo questa parola solo per l'asse).

Con la geometria analitica dimostrerai le due seguenti proprietà:

a) se tagli una parabola con un fascio di rette parallele, tutte le corde sono bisecate dal diametro passante per il punto di contatto della tangente;
b) la lunghezza del segmento di diametro compreso tra una tangente e la parabola cresce come il quadrato della distanza del diametro dal punto di tangenza.





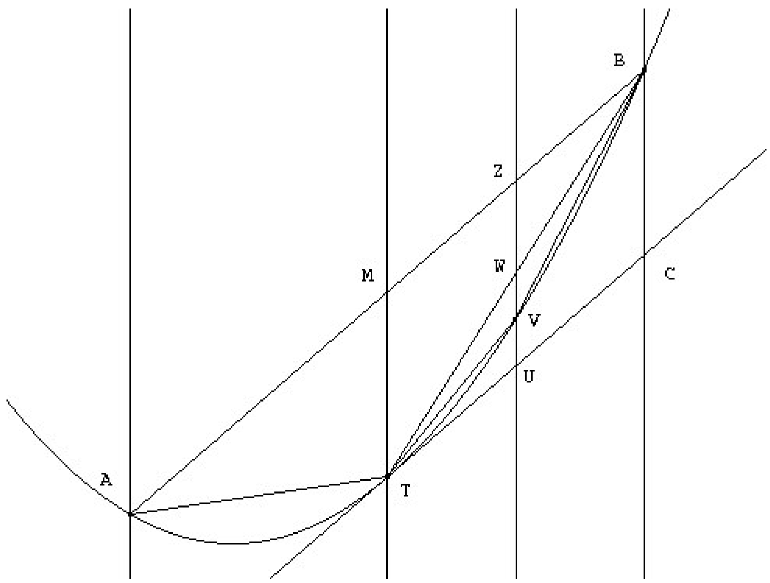
Per la prima – notissima – ti basterà notare che le ascisse delle intersezioni della parabola di equazione $y = a x^2$ con la retta $y = m x + q$ sono date dall'equazione $a x^2 - m x - q = 0$, e che la semisomma di tali radici è data da $x = m / 2a$, costante indipendente da q. Tale valore è anche la radice doppia dell'equazione nel caso in cui il discriminante sia nullo, cioè per $m^2 + 4 a q = 0$.

Per la seconda ti conviene porre l'origine nel punto di tangenza, di modo che la parabola abbia equazione $y = a x^2 + b x$; la tangente è allora $y = b x$, e la distanza cercata è la differenza delle due ordinate, cioè $\Delta y = a x^2$. Essa cresce appunto come il quadrato di x.

(Io assumevo queste due proprietà come note dal libro delle coniche – quello di Euclide e Aristeo, secondo Heath – assieme alla uguaglianza UV = VW che ti dimostro più avanti. Sono le prime 3 proposizioni del mio libro). A questo punto passa alla buona vecchia geometria di Euclide.

Considera il triangolo ABT, diviso dalla mediana TM, parallela all'asse, nei due triangoli ATM e BTM, che sono equivalenti avendo la stessa base TM e la stessa altezza, pari alla larghezza della striscia verticale che li contiene.

Ragiona ora sulla striscia destra. Esegui sul lato TB la costruzione del triangolo TBV, di modo che la tangente in V sia parallela alla corda TB. Per la proprietà a) la VZ è bisettrice della striscia, e dunque per la b) risulta UV = 1/4 CB = 1/4 TM. Siccome ovviamente WZ = 1/2 TM, ottieni che VW = 1/4 TM. Dunque l'area del triangolo TBV è un quarto di quella del triangolo TMB, che è appunto la proprietà che ti serve per la dimostrazione.



Mi pare che questo modo di procedere sia molto semplice: perfino gli studenti di adesso sono in grado di comprenderlo! Io ero molto più contorto, perché prima ricavavo il risultato col mio "metodo" dei baricentri, e ci mettevo le proposizioni da 4 a 17, poi lo dimostravo col metodo di esaustione nelle proposizioni 18-24, come tu hai riportato nel tuo libro.

Tuo affezionato
Archimede

P.S. Le lettere di pag. 35 non sono coerenti con la figura di pag. 36. Leggi a pag. 35, riga 11 dal basso: "sui lati AB e AC i due triangolini ADB e AEC". Ti faccio anche notare che il titolo del mio libro è *Quadratura della sezione del cono ortogonale* (o se vuoi, *del cono rettangolo*) e non *Quadratura della sezione ortogonale del cono*).