From: Isaac.Newton@antipurgatorio.purg
To: Trucidi_alcioni.nidicoli_curati.ridicoli_tucani@crudi_licaoni.it
Object: Omeopatia, frazioni continue e formula di Wallis

Caro Epsi,
intanto la tua risposta è giusta; nel cap. 12 – «se l'antiveder qui non è vano»,[1] direbbe Dante – ti spiegherò le regole per capire se un algoritmo converge o no.

Ti spiego ora la faccenda dell'omeopatia. Sai, io ero un po' alchimista, queste cose – anche se inventate dopo di me, nella prima metà dell'Ottocento, da un tale Samuel Hahnemann, sulla base del principio "similia similibus curentur" – m'interessano sempre. Tu sai che i principi dell'omeopatia impongono di diluire più volte una sostanza attiva, per esempio nel rapporto 1:100, scuotendola ogni volta, ottenendo così soluzioni sempre più diluite. Supponi dunque di avere un principio attivo, di diluirlo e ottenere la "prima diluizione centesimale" (1CH) all'1%, poi di diluirlo ancora e ottenere una soluzione (2CH) allo 0,1%, e così via, fino, eventualmente, alla trentesima (30CH).

Poiché in tre litri d'acqua[2] (per fare i conti facili) ci sono circa $10^{26}$ molecole, capisci bene che già alla tredicesima centesimale hai mediamente solo una molecola di principio attivo sui tre litri di "medicamento" ottenuti.

Per passare a cose più serie, eccoti come si costruisce la frazione continua aritmetica generatrice di un numero reale $x$ qualsiasi. Basta scrivere, come abbiamo detto,

$$x = b_0 + \frac{1}{x_1} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{x_2}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = \cdots$$

dove i $b_k$ sono le parti intere, e quello che resta (la "mantissa") è minore di 1. Dunque il suo inverso è ancora maggiore di 1, ha una parte intera non nulla, e così via.

Per evitare di scrivere tutte queste frazioni a più piani, si usa la notazione

$$x = b_0 + \frac{1}{b_1 +}\,\frac{1}{b_2 +}\,\frac{1}{b_3 +}\cdots$$

o anche $x = [b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots]$.

Comunque si possono considerare anche frazioni un po' più generali, del tipo

$$x = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\,\frac{a_2}{b_2 +}\,\frac{a_3}{b_3 +}\cdots$$

Le frazioni continue sono il limite delle approssimanti (o ridotte) $f_n = A_n / B_n$, ove i numeratori e denominatori parziali sono dati dalle formule di ricorrenza

$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}$
$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}$
a partire da $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$.

Le frazioni continue forniscono delle "migliori approssimazioni" di $x$, nel senso che se $p/q$ soddisfa la disuguaglianza $|x - p/q| < |x - A/B|$, con $A/B$ ridotta, si ha necessariamente $q > B$. Esistono anche altre migliori approssimazioni; tuttavia se risulta $|x - p/q| < 1/2q^2$, allora $p/q$ è una ridotta.

[1] Inf., xxviii, 78.
[2] 1 mole ≡ (2 + 16) = 18 g; 1 litro d'acqua ≡ 1 kg ≡ 1000/18 = 55,5 moli; 1 mole ≡ $6 \cdot 10^{23}$ molecole

Ed eccoti una sintetica dimostrazione della formula di Wallis $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots}$ (ti basta un po' di analisi da liceo).

Poni $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Risulta (integrando per parti) $n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{(n-2)}$ ; facilmente quindi ottieni le relazioni $I_{2m} = a_m \cdot \pi/2$, $I_{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)a_m}$, dove $a_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m}$.

Poiché $0 \le \sin x \le 1$, la successione $\{I_n\}$ è strettamente decrescente. Dunque $I_{2m+2} < I_{2m+1} < I_{2m}$ , e quindi, dividendo per $a_m$, $\frac{2m+1}{2m+2}\frac{\pi}{2} < \frac{1}{(2m+1)a_m^2} < \frac{\pi}{2}$. Per $m \to \infty$ si ha il risultato di Wallis.

La convergenza (l'approssimazione è per difetto; per eccesso se ci si arresta a uno solo di due fattori pari uguali a numeratore, per esempio, a 8/7, trascurando il successivo 8/9) è assai mediocre, l'errore essendo dell'ordine di $\pi/(8m)$.

Notando che $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{3^2 - 1}{3^2}$, ecc., hai la formula equivalente:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\ldots$$

Vedi che belle cose sapevamo fare ai miei tempi?

Tuo
Isaac