From: Leonhard.Euler@cielodelsole.par
To: Dilati_ucronici.circuiti_nodali@duali_incroci.it
Object: Re: termine della progressione

Caro Epsi,
mi dici che per te bastava il ventitreesimo termine, che ha 1.262.612 decimali, e dici bene, anche se ti sei aiutato un pochino con Excel. Io i calcoli li facevo a mano!

Ma eccoti la soluzione del problemino per i tuoi amici.

La progressione cercata è 2, 4, 16, 256, … , cioè 2^1, 2^2, 2^4, 2^8, … , 2^q, ove l'esponente q raddoppia ogni volta, e dunque è a sua volta una potenza di 2: $q = 2^0$, 2^1, 2^2, 2^3, ecc. Dunque, il venticinquesimo termine corrisponde a $q = 2^{24} = 16.777.216$. Passando a base 10, $N = 10^{q \log 2}$, dove il logaritmo è quello in base 10 (con buona pace del nostro amico John Napier, qui ci servono proprio i logaritmi decimali). Sulle tavole trovi $\log_{10} 2 = 0{,}30103$, con Excel 0,301029995663981… Nel libro do altre 3 cifre significative, perché dovendo moltiplicare per q, che è compreso tra 10^7 e 10^8, già mi serve un errore minore di 10^{-8} solo per avere giusta la parte intera. Infatti, se ti fermi a 0,30102999 – oppure se prendi il valore straordinariamente fortunato di 0,30103 – avrai giusta la parte intera e nessun decimale, e quindi rispondi alla domanda, ma poi non conosci nessuna cifra significativa del risultato. Ma se ti basta l'ordine di grandezza, prendi pure 0,3: farai un errore minore dell'1%. In fondo, è l'approssimazione che fate quando dite "un K" per quelli che sono in realtà $2^{10} = 1024$ byte.

Considerando sempre i logaritmi in base 10, abbiamo dunque $\log N = q \log 2 = 5.050.445{,}259733\ldots$, e pertanto N ha 5.050.446 cifre in base 10. Guardando la mantissa scopri che le prime cifre significative sono 181858 (infatti $10^{0{,}259733} = 1{,}81858\ldots$, ma non ha molta importanza. Io però ne do undici, tanto per gradire).

A questo punto la mia domanda era facile, vero? Basta trovare il primo esponente q che risulta maggiore di $p = 3.021.377$, e si scopre subito che è $q = 2^{22} = 4.194.304$

Grüss Gott
Leo