Più che 'l doppiar de li scacchi s'immilla

Riccardo Rosso

Dipartimento di Matematica “F. Casorati”,

Università di PAVIA

Sommario

- Una nascita leggendaria
- Matematici scacchisti
- Torri e permutazioni
- Torri e numeri di CATALAN
- Il problema di CHARLES
- Il movimento del cavallo
- Il problema delle regine

Una nascita leggendaria

La leggenda di Sissa Nassir

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$

Esempio di progressione geometrica

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

$$S(1 - q) = 1 - q^{n+1} \qquad S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Se $q = 2$, $n = 63$

$S = 2^{64} - 1 \simeq 2^{64} = (2^{10})^{6.4} \gtrsim (10^3)^{6.4} \gtrsim 10^{19}$.

L’incendio suo seguiva ogne scintilla;
ed eran tante, che ’l numero loro
più che ’l doppiar de li scacchi s’immilla.

(DANTE, Paradiso XXVIII, 91-93)

Matematici scacchisti

Georg ATWOOD (1745-1807)

Ideatore della ”macchina” per verificare le leggi del moto uniformemente accelerato, che oggi porta il suo nome

Trascrisse le partite a scacchi giocate con François PHILIDOR

Matematici scacchisti

Carl Jänisch (1813-1872)

Professore di Meccanica razionale a S. Pietroburgo

Découvertes sur le cavalier (1837)

Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs (1862-63, 3 voll.)

"variante" Schliemann-Jänisch nella partita spagnola

Matematici scacchisti

Andrei Andreevich MARKOV (1856-1922)

Introdusse dei processi stocastici che portano oggi il suo nome: le catene di MARKOV

Giocò e vinse con Michail Ivanovič ČIGORIN

Matematici scacchisti

Emanuel LASKER (1868-1942)

Über Reihen auf der Konvergenzgrenze (1901)

Zur Theorie der moduln und Ideale (1905)

Campione del mondo di scacchi (1894-1921)

difesa LASKER

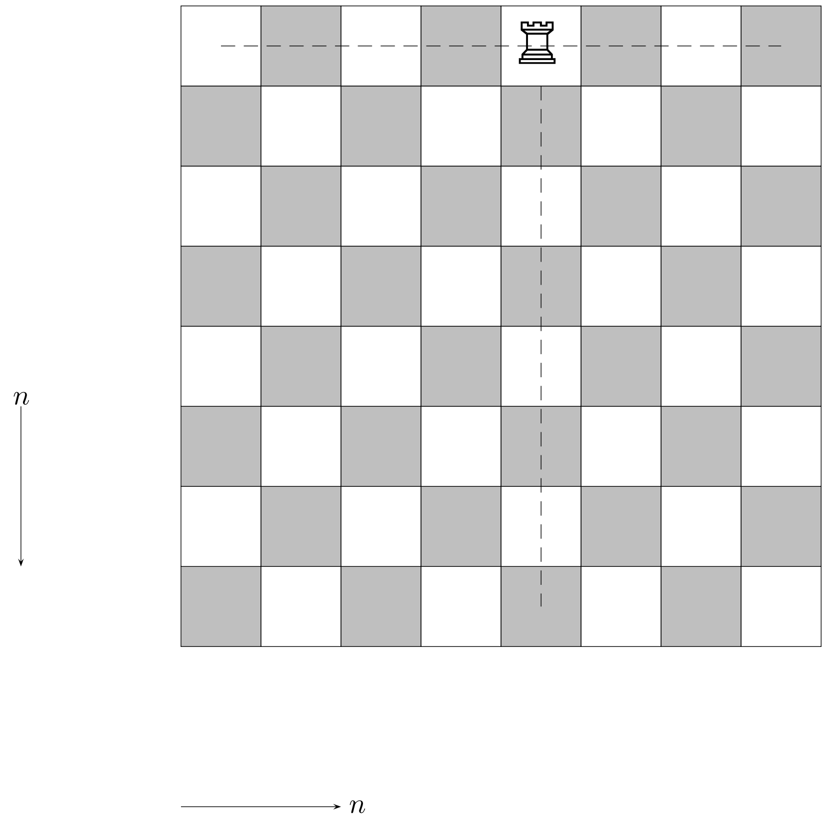
Torri e permutazioni

In quanti modi è possibile disporre su una scacchiera $n \times n$, n torri in modo che non si minaccino?

Ogni torre può muoversi solo in orizzontale o in verticale, di un numero di caselle arbitrario.

Ogni torre "mangia" solo sulla propria verticale e sulla propria orizzontale.

Torri e permutazioni

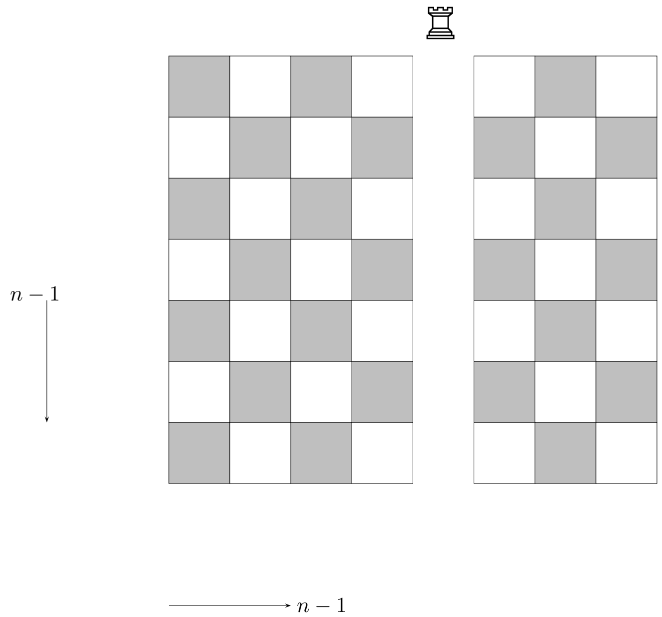


Chiamiamo P_n questo numero.

Partiamo dalla prima riga.

Abbiamo n modi per collocare la prima torre.

Torri e permutazioni



Rimaniamo con una scacchiera $(n-1) \times (n-1)$ su cui dobbiamo disporre $n-1$ torri. Sia P_{n-1} il numero di modi possibili

$$P_n = nP_{n-1}$$

Torri e permutazioni

Abbiamo $n-1$ modi per collocare la seconda torre sulla prima riga della scacchiera ridotta.

Ripetendo il ragionamento troviamo che

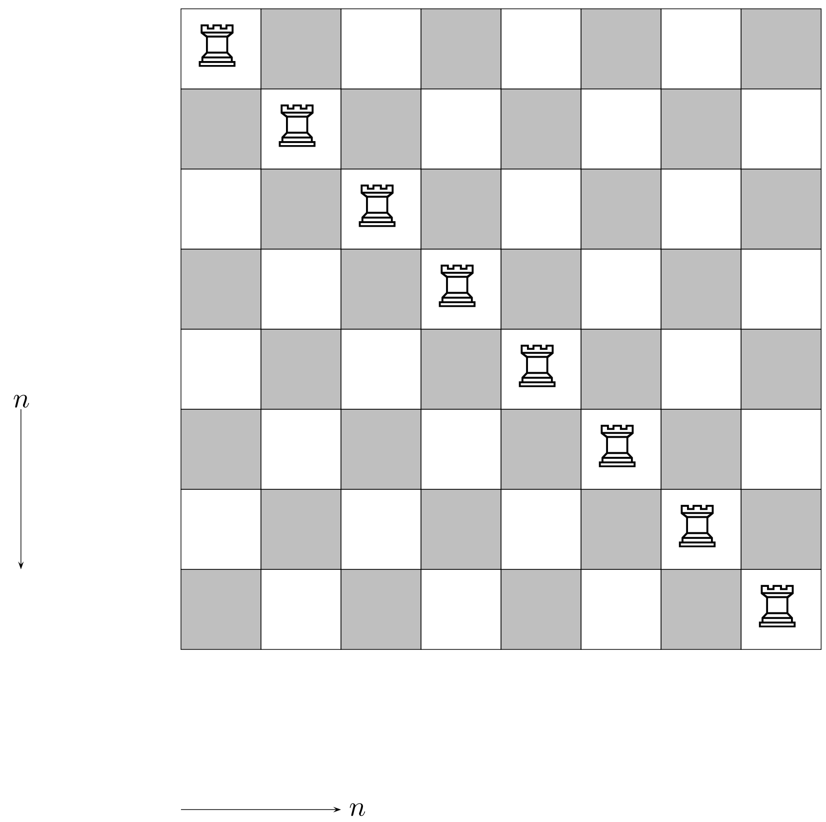
$$P_n = n(n-1)P_{n-2}$$

e continuando...

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra le posizioni delle torri e le permutazioni dei numeri $1, 2, ..., n$

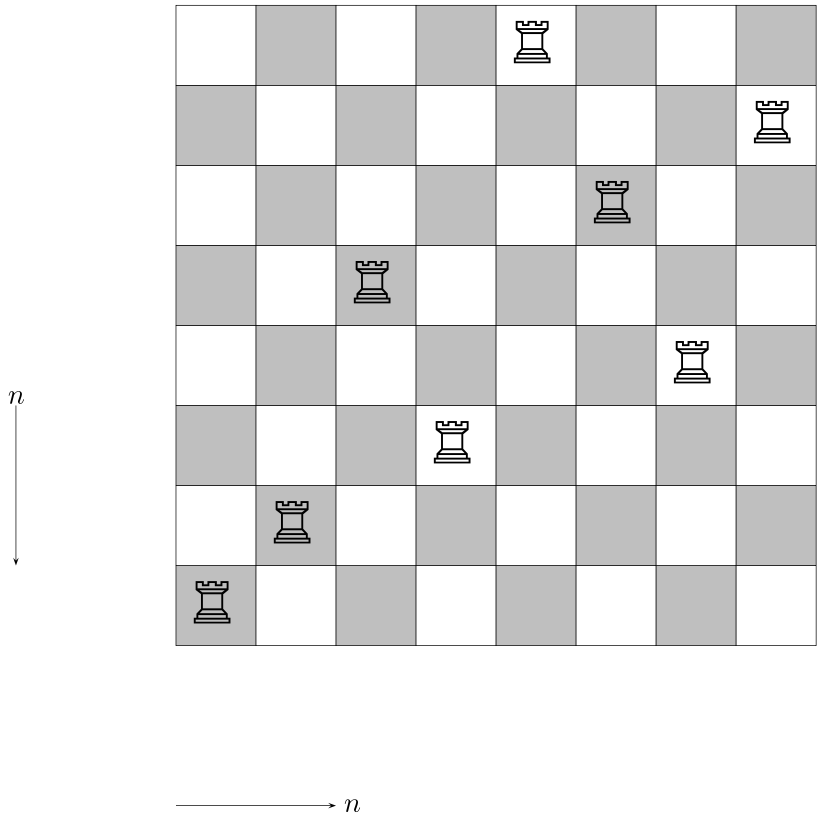
Torri e permutazioni



Esempio ($n = 8$)

A questa disposizione facciamo corrispondere la permutazione
$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$

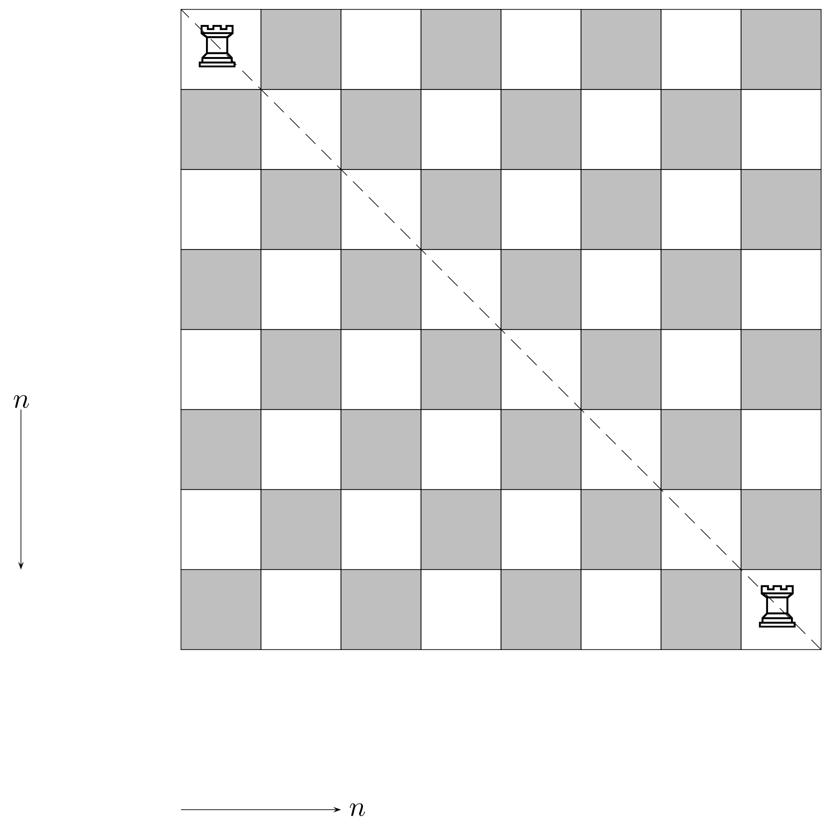
Torri e permutazioni



$$(5, 8, 6, 3, 7, 4, 2, 1)$$

Torri e numeri di CATALAN

Presa una scacchiera $n \times n$, in quanti modi diversi una torre può passare dal vertice in alto a sinistra a quello in basso a destra senza oltrepassare la diagonale?



Problemi equivalenti

• Prese n unità positive:

$$1, \quad 1, \quad 1, ..., 1$$

ed n unità negative:

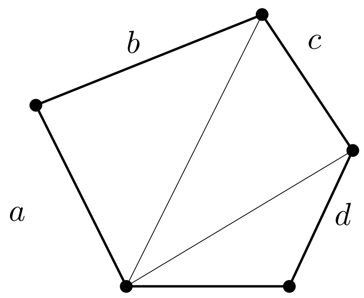
$$-1, \quad -1, \quad -1, ..., -1$$

sommarle in modo che nessuna somma parziale sia minore di zero;

• In una votazione con $2n$ votanti i due candidati A e B hanno ricevuto n voti ciascuno. In quanti spogli delle schede il candidato A non sarà mai in svantaggio rispetto a B?

• Trovare in quanti modi è possibile dividere in triangoli un poligono convesso di n lati per mezzo di sue diagonali, senza che queste si intersechino all'interno del poligono.

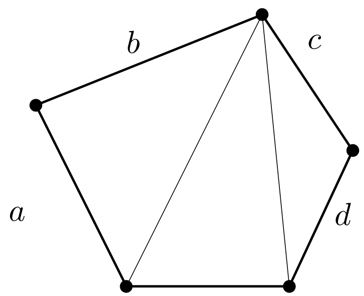
Triangolazione di un poligono



$(((ab)c)d)$

$$(((ab)c)d)$$

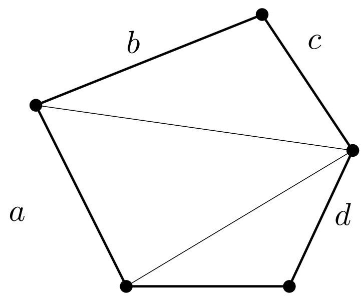
Triangolazione di un poligono



$((ab)(cd))$

$$((ab)(cd))$$

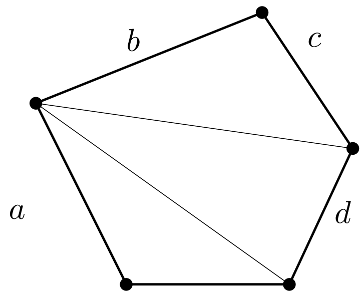
Triangolazione di un poligono



$((a(bc))d)$

$$((a(bc))d)$$

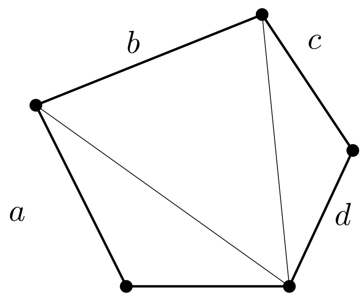
Triangolazione di un poligono



$(a((bc)d))$

$$(a((bc)d))$$

Triangolazione di un poligono



$(a(b(cd)))$

$$(a(b(cd)))$$

Triangolazione di un poligono

Associamo ad ogni triangolazione un simbolo, togliendo le parentesi chiuse e l'ultimo lato d:

$$\bullet(((abc$$

$$\bullet((ab(c$$

$$\bullet((a(bc$$

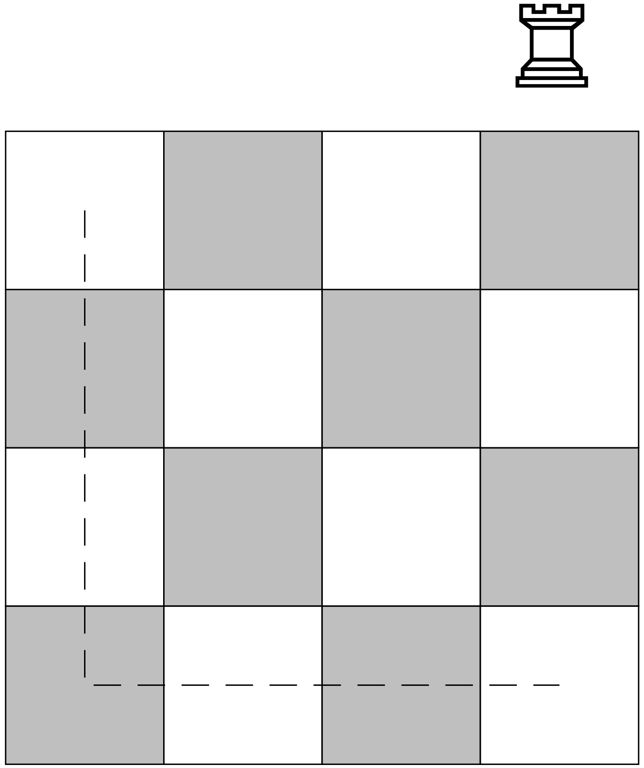
$$\bullet(a((bc$$

$$\bullet(a(b(c$$

Triangolazione di un poligono

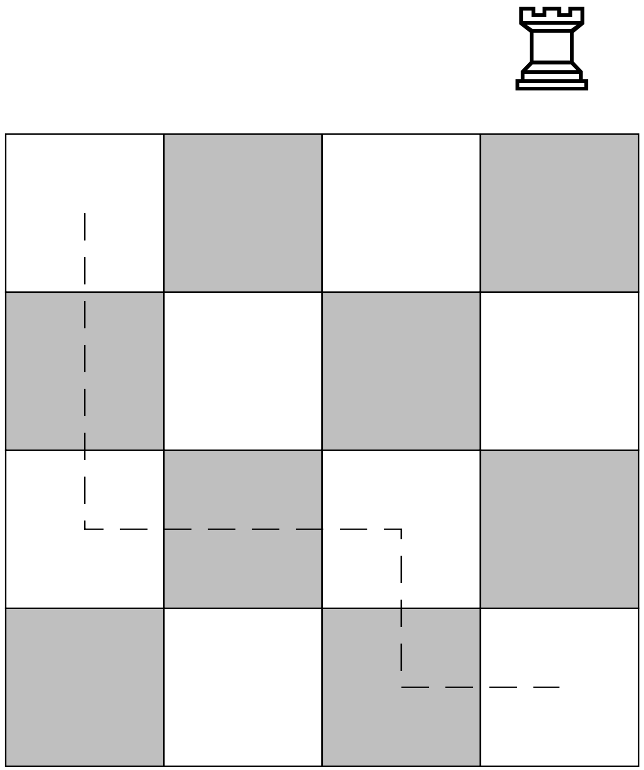
Ad ogni $($ associo una mossa della torre lungo la verticale discendente V, ad ogni lettera una mossa lungo la orizzontale, verso destra O.

Percorsi equivalenti di una torre



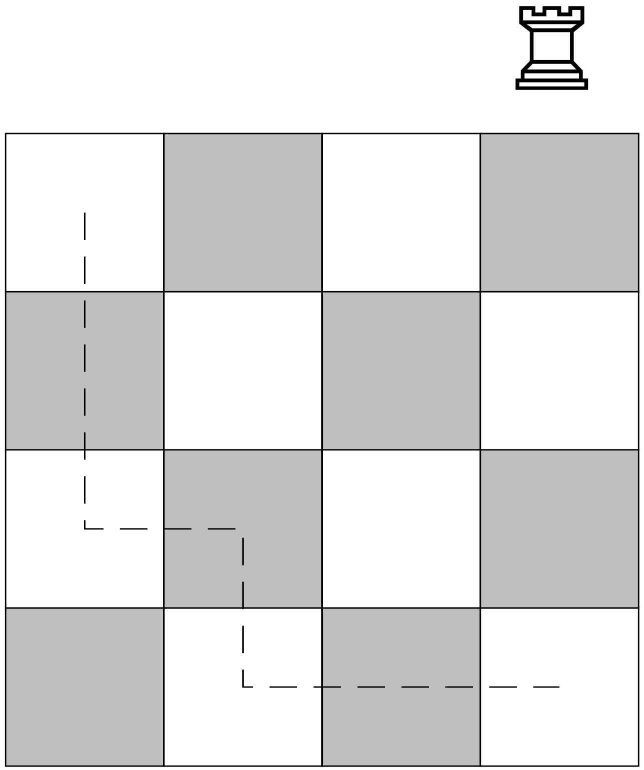
$\bullet(((abc \leftrightarrow VVVOOO$

Percorsi equivalenti di una torre



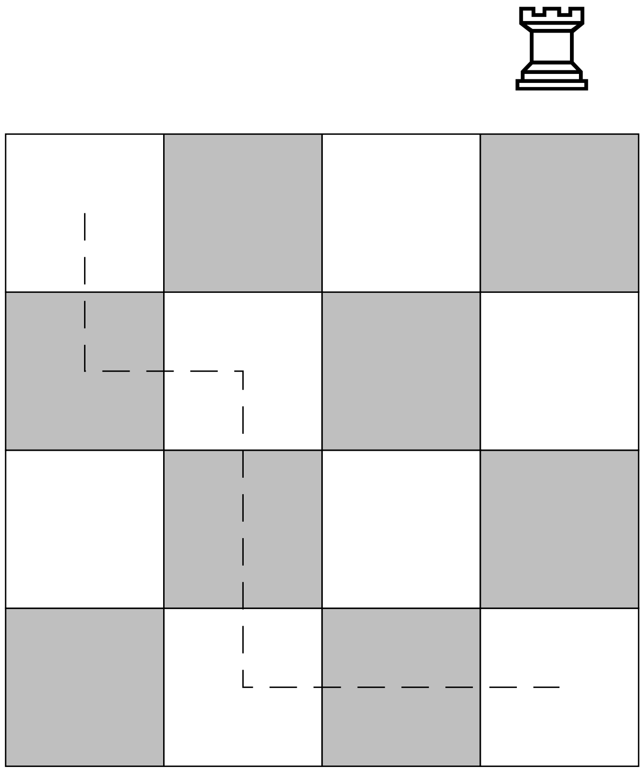
$\bullet ((ab(c \leftrightarrow VVOOVO$

Percorsi equivalenti di una torre



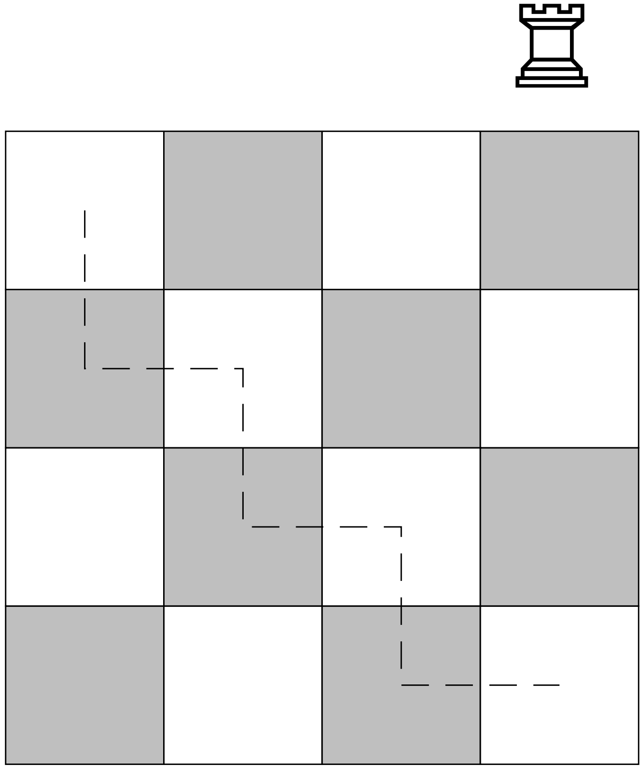
$\bullet ((a(bc \leftrightarrow VVOVOO$

Percorsi equivalenti di una torre



$\bullet(a((bc \leftrightarrow VOVVOO$

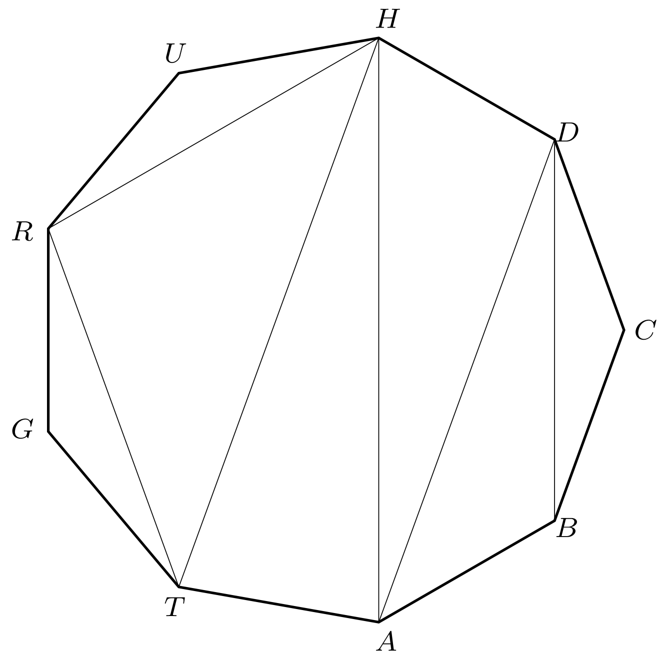
Percorsi equivalenti di una torre



$\bullet(a((bc \leftrightarrow VOVOVO$

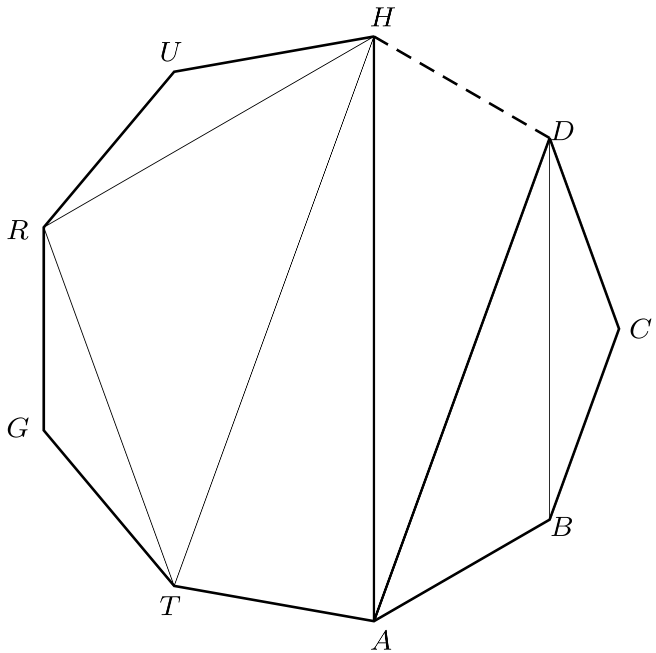
Formula di SEGNER per i numeri di CATALAN

Sia C_n il numero di triangolazioni distinte di un poligono convesso di $n+2$ lati



C_{n+1} sarà il numero di triangolazioni di un poligono convesso di $n+3$ lati: in questo esempio $n=6$

Formula di SEGNER per i numeri di CATALAN



Omettendo un lato, si passa da un solo poligono di $n+3$ lati a due poligoni che hanno complessivamente $(n+4)$ lati

Formula di SEGNER per i numeri di CATALAN

Le triangolazioni del poligono di $n+3$ lati si ottengono fattorizzando quelle di poligoni di $k+2$ lati con quelle di un poligono di $n-k+2$ lati.

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \qquad C_0 = 1$$

$$C_0 = 1 \quad C_1 = 1 \quad C_2 = 2 \quad C_3 = 5 \quad C_4 = 14 \quad C_5 = 42 \ldots$$

C_n è il numero di cammini di una torre su una scacchiera $(n+1) \times (n+1)$

Il problema di Charles

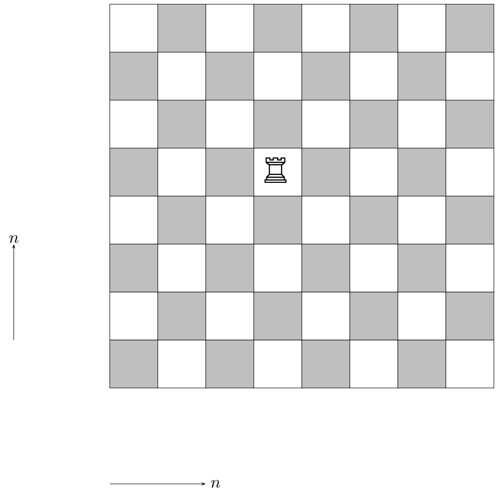
Jacques CHARLES: chi era costui?

Problema. In quanti modi è possibile far passare una torre da una data casa ad un'altra casa assegnata, in un numero prescritto x di mosse?

È un buon esercizio di formalizzazione

Il problema di Charles

Consideriamo una scacchiera $n \times n$



La casa finale può

a): coincidere con quella di partenza

b): essere sulla stessa riga o colonna di quella di partenza

c): essere altrove sulla scacchiera

Nota: non vi sono effetti di bordo

Il problema di Charles

y_x numero di modi relativi al caso a)

u_x numero di modi relativi al caso b)

z_x numero di modi relativi al caso c)

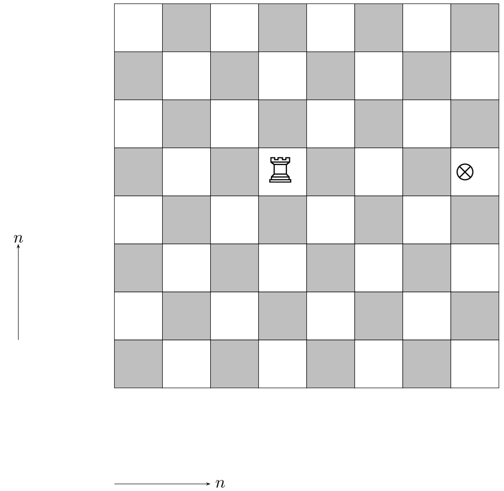
Caso a)

La prima mossa si può scegliere in $2(n-1)$ modi (N. B. $y_1 = 0$)

Restano $x-1$ mosse e siamo ora nel caso b):

$$y_x = 2(n-1)u_{x-1}$$

Caso b)

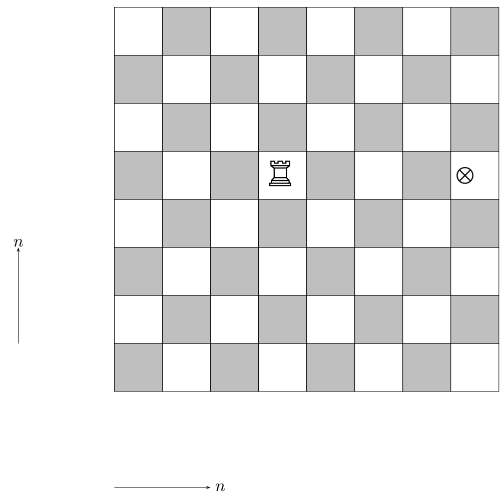


Vi sono tre modi per compiere il tragitto in x modi

- mi porto sulla casa di arrivo alla prima mossa e vi ritorno dopo altre $x - 1$ mosse: i modi sono

$$y_{x-1}$$

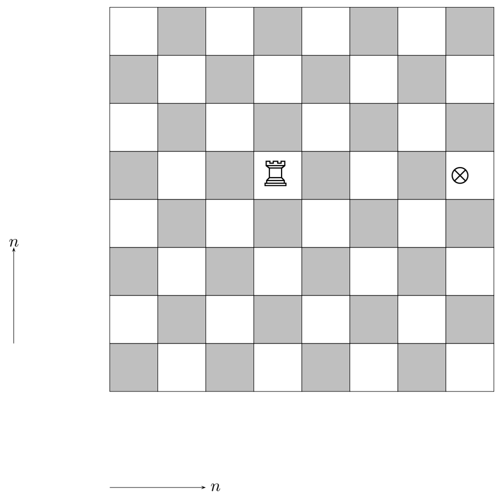
Caso b)



$\bullet$ mi porto su una delle altre $n-2$ case accessibili sulla stessa riga alla prima mossa e raggiungo la meta in altre u_{x-1} mosse: i modi sono

$$(n-2)u_{x-1}$$

Caso b)



• mi porto su una delle altre $n-1$ case accessibili alla prima mossa sulla colonna di partenza e raggiungo la meta in altre z_{x-1} mosse: i modi sono

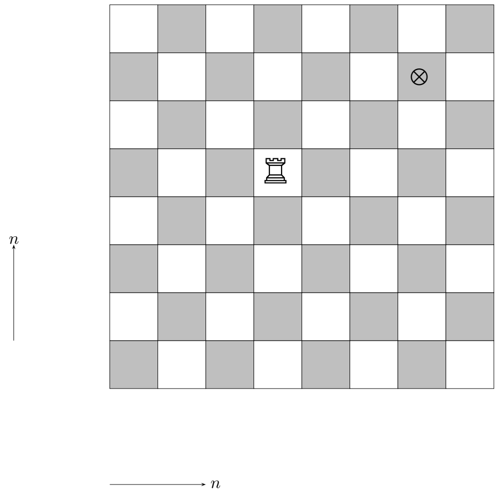
$$(n-1)z_{x-1}$$

Caso b)

Dunque:

$$u_x = y_{x-1} + (n-2)u_{x-1} + (n-1)z_{x-1}$$

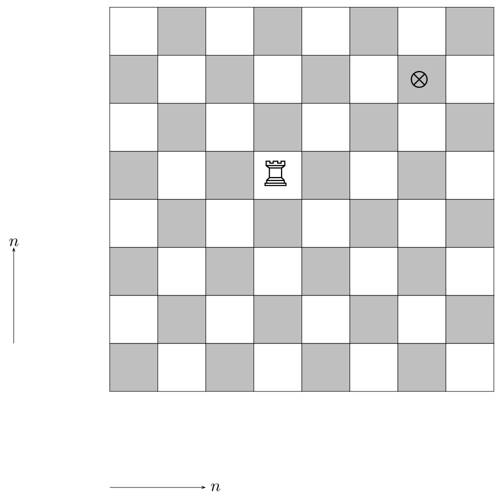
Caso c)



$\bullet$ ci portiamo sulla casa che sta sulla stessa riga o sulla stessa colonna di quella di arrivo e si raggiunge la meta in altre u_{x-1} mosse: i modi sono

$$2u_{x-1}$$

Caso c)



$\bullet$ ci portiamo su una delle altre $2(n-2)$ case che stanno o sulla stessa riga o sulla stessa colonna della casella di arrivo che si raggiunge in altre z_{x-1} mosse: i modi sono

$$2(n-2)z_{x-1}$$

Caso c)

Dunque:

$$z_x = 2u_{x-1} + 2(n-2)z_{x-1}$$

Il problema di Charles

Le funzioni incognite sono soluzioni del sistema di equazioni alle differenze finite

$$\begin{cases} y_x = 2(n-1)u_{x-1} \\ u_x = y_{x-1} + (n-2)u_{x-1} + (n-1)z_{x-1} \\ z_x = 2u_{x-1} + 2(n-2)z_{x-1} \end{cases}$$

Il problema di Charles

$$\begin{cases} y_x = \frac{1}{n^2}\left[2(n-1)(n-2)^x + (n-1)^2(-2)^x + (2n-2)^x\right] \\ u_x = \frac{1}{n^2}\left[(n-2)^{x+1} - (n-1)^2(-2)^x + (2n-2)^x\right] \\ z_x = \frac{1}{n^2}\left[-2(n-2)^x + (-2)^x + (2n-2)^x\right] \end{cases}$$

Passeggiate aleatorie

Il numero di mosse possibili tra cui scegliere è $N = [2(n-1)]^x$

$$\begin{cases} p_a = \frac{y_x}{N} \\ p_b = \frac{u_x}{N} \\ p_c = \frac{z_x}{N} \end{cases}$$

Il movimento del cavallo

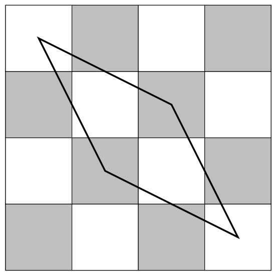
Problema. È possibile far muovere un cavallo sulla scacchiera 8×8 in modo che passi per tutte le 64 case una ed una sola volta?

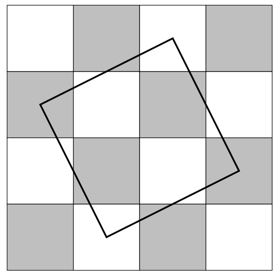
Si sono occupati del problema, tra gli altri: De Moivre, Eulero, Vandermonde, Lavernède

Suddividiamo la scacchiera in quattro quadranti.

Le 16 case di ciascun quadrante possono essere raggiunte da uno solo di questi quattro cammini:

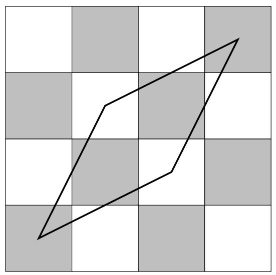
r

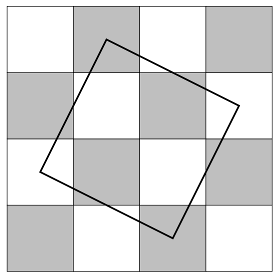




q

R





Q

Ogni casella fa parte o di uno dei cammini a rombo (r, R) o di uno dei cammini quadrati (q, Q)

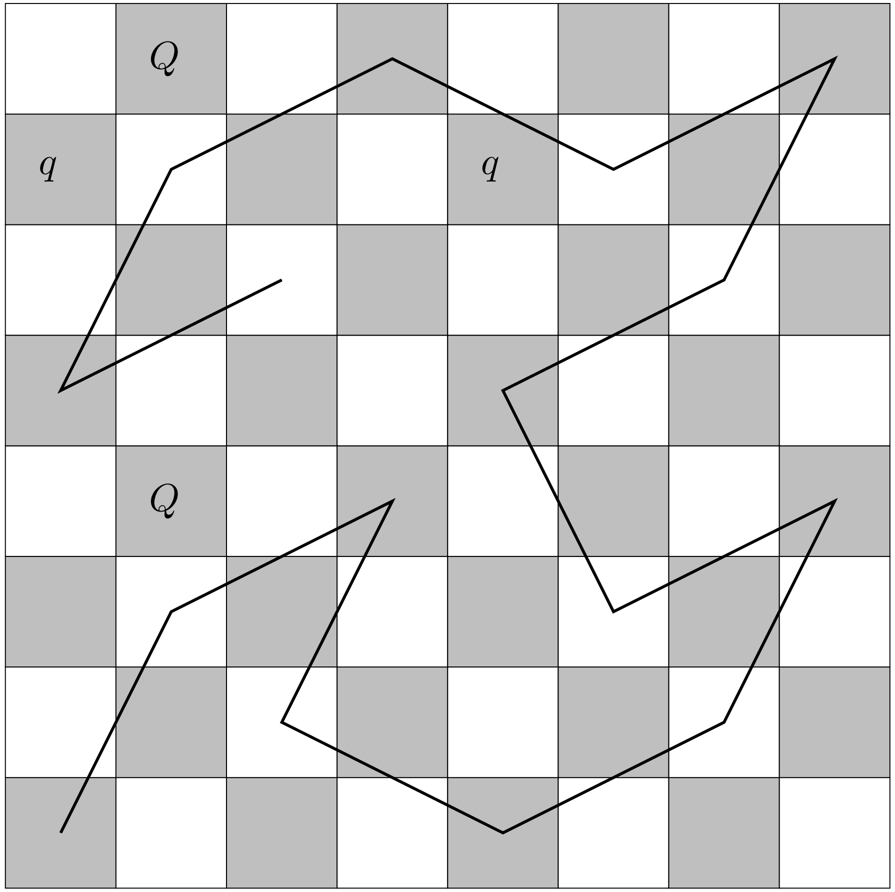
r	Q	q	R
q	R	r	Q
Q	r	R	q
R	q	Q	r

L'intera scacchiera avrà una struttura simile

r	Q	q	R	r	Q	q	R
q	R	r	Q	q	R	r	Q
Q	r	R	q	Q	r	R	q
R	q	Q	r	R	q	Q	r
r	Q	q	R	r	Q	q	R
q	R	r	Q	q	R	r	Q
Q	r	R	q	Q	r	R	q
R	q	Q	r	R	q	Q	r

Ognuno dei quattro cammini può essere percorso completamente

Percorso a rombo R:



Si parte dal percorso a rombo R

r	Q	q	9	r	Q	q	7
q	10	r	Q	q	8	r	Q
Q	r	14	q	Q	r	6	q
11	q	Q	r	15	q	Q	r
r	Q	q	13	r	Q	q	5
q	12	r	Q	q	16	r	Q
Q	r	2	q	Q	r	4	q
1	q	Q	r	3	q	Q	r

Si prosegue con il percorso a quadrato q

r	Q	22	9	r	Q	20	7
23	10	r	Q	21	8	r	Q
Q	r	14	31	Q	r	6	19
11	24	Q	r	15	30	Q	r
r	Q	32	13	r	Q	18	5
25	12	r	Q	29	16	r	Q
Q	r	2	27	Q	r	4	17
1	26	Q	r	3	28	Q	r

Si passa al percorso a rombo r

42	Q	22	9	40	Q	20	7
23	10	41	Q	21	8	39	Q
Q	43	14	31	Q	47	6	19
11	24	Q	48	15	30	Q	38
44	Q	32	13	46	Q	18	5
25	12	45	Q	29	16	37	Q
Q	33	2	27	Q	35	4	17
1	26	Q	34	3	28	Q	36

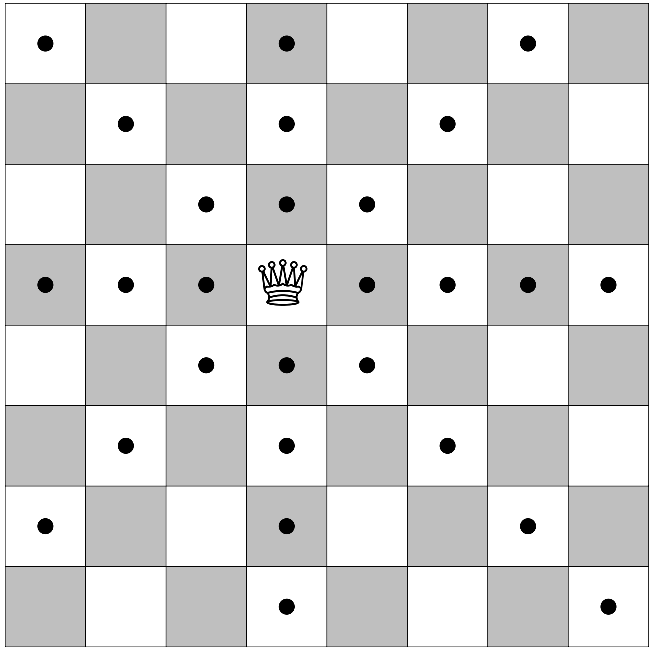
Si termina con il percorso a quadrato Q

42	59	22	9	40	57	20	7
23	10	41	58	21	8	39	56
60	43	14	31	62	47	6	19
11	24	61	48	15	30	55	38
44	49	32	13	46	63	18	5
25	12	45	64	29	16	37	54
50	33	2	27	52	35	4	17
1	26	51	34	3	28	53	36

Il problema delle regine

Problema.

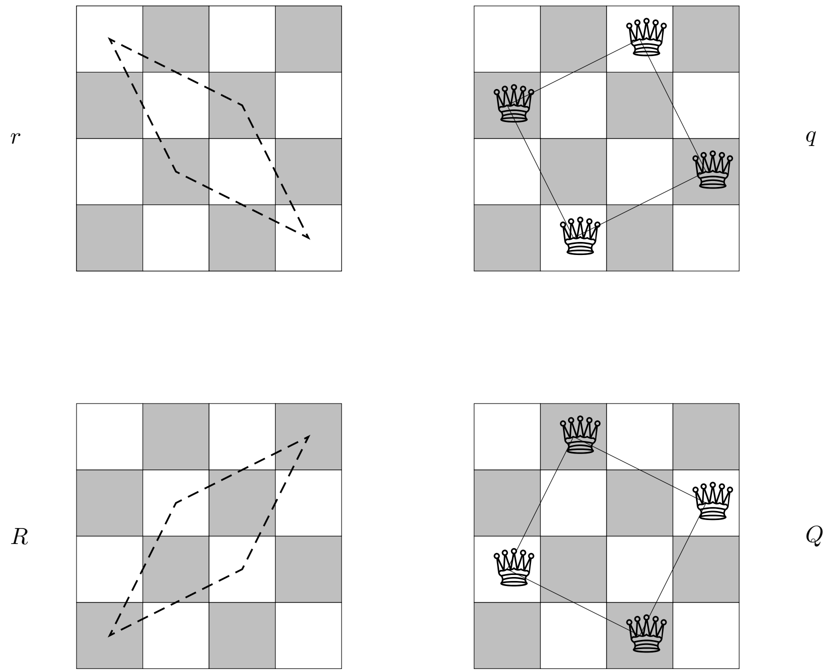
È possibile disporre su una scacchiera $n \times n$ n regine che non si attacchino?



Per la scacchiera 8×8 il problema fu anche risolto da GAUSS.

Per $n = 2$ o 3 il problema non ha soluzione.

Per $n = 4$



Strategia

Far muovere la regina come un cavallo [sic!]