

Elementi di Probabilità presenti nell'opera teatrale

Il caso, probabilmente: la partita a dadi

di Riccardo Mini

con Fausto Bernardinello, Maria Eugenia D'Equino, Annig Raimondi
con la collaborazione dei proff. Alberto Colorni e Tullia Norando del Politecnico di Milano

Il gioco a dadi (Barbara e Claudio) scena1 ripetuta

LEGGE 1

Gli esiti di un esperimento sono tutte le possibili alternative, la probabilità esprime il grado di fiducia che riponiamo nel verificarsi di un'alternativa. Possiamo esprimere questa valutazione con un numero compreso tra zero e uno. Assegniamo probabilità 0 ad un esito impossibile e probabilità 1 ad un esito certo.

Probabilità classica: In un singolo lancio di un dado i possibili esiti sono 6 dunque, se il dado non è truccato, la probabilità che in un singolo lancio esca 1 è una su sei cioè $1/6$ (circa 17%).

LEGGE 2

Se \bar{E} è l'evento contrario di E, allora $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

La probabilità che in un singolo lancio NON esca 1 è cinque su sei cioè $5/6$ (circa 83%).

Osservo che "non esce 1" è l'evento contrario di "esce 1" per cui se la probabilità di "esce 1" è 17%, la probabilità di "non esce 1" deve essere $100\% - 17\% = 83\%$.

1 lancio di un unico dado

La prima conclusione di Claudio è corretta: nel singolo lancio Barbara ha solo il 17% di probabilità di vittoria.

EVENTI INDIPENDENTI

Se E e F sono due eventi indipendenti, la probabilità che E ed F si verifichino contemporaneamente è uguale al prodotto delle loro probabilità.

3 lanci di un unico dado

Claudio propone a Barbara di puntare alla pari sull'esito "Esce 1 almeno una volta in 3 lanci" cioè contro l'esito "1 non esce in nessuno dei 3 lanci"

Claudio mente sul calcolo della probabilità che Barbara vinca.

Il ragionamento errato che propone è: se Barbara ha probabilità 17% di vincere nel singolo lancio, ripetendo il lancio 3 volte la sua probabilità di vittoria triplica, cioè diventa circa 51%.

Il ragionamento corretto è invece:

Gli esiti dei tre lanci sono indipendenti l'uno dall'altro, per cui in ogni lancio la probabilità che NON esca 1 è la stessa, cioè $5/6$ e la probabilità che NON esca 1 in nessuno dei 3 lanci è dunque $(5/6)^3 = 125/216$, cioè circa il 58%.

Conclusione : Barbara ha fatto male a fidarsi, eseguendo una sequenza di tre lanci Barbara ha solo il 42% circa di probabilità di vittoria.

La zara (Barbara e Mica)

Nel gioco della zara si usano 3 dadi. I dadi vengono lanciati contemporaneamente una sola volta dal giocatore; poi si sommano i punteggi, ottenendo quindi come esito un numero compreso tra 3 e 18. Prima del lancio il giocatore punta sull'uscita di un esito. Facendo il calcolo delle combinazioni di punteggi favorevoli a ciascun esito del gioco si vede subito che gli esiti non sono equiprobabili. Infatti gli esiti 3 e 18 si possono ottenere in un unico modo mediante la terna (1,1,1) e (6,6,6) rispettivamente, mentre ad esempio 4 si ottiene in 3 modi, mediante le terne: (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1).

Tabella delle frequenze

esito	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
terne	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	216

Tutte le terne possibili sono 216. facendo il rapporto tra il numero di terne favorevoli ad un esito e 216 si ottiene la probabilità dell'esito stesso.

Gli esiti più probabili sono 10 e 11. Esiti complementari rispetto a 21 hanno la stessa probabilità.

Tabella dei valori approssimati delle probabilità

esito	3 (18)	4 (17)	5 (16)	6 (15)	7 (14)	8 (13)	9 (12)	10 (11)
probabilità	0.463%	1.39%	2.78%	4.63%	6.94%	9.72%	11.57%	12.5%

L'osservazione di Mica che 3 (come 18) è il risultato meno probabile è esatta

La divisione della posta (Barbara e Anna) scena ripetuta

Barbara e Anna fanno lanci consecutivi di una moneta. Barbara punta sull'esito "esce testa" e Anna sul contrario ("esce croce"). Si prende nota di chi vince ogni lancio. Vincerà la posta di 100 euro chi per primo otterrà 10 vittorie. Al dodicesimo lancio la situazione è la seguente: Anna 3 vittorie e Barbara 9 vittorie. Barbara deve uscire. Come dividere la posta?

Soluzione corretta : bisogna dividere la posta in base alla probabilità di vittoria di ciascuno dei due giocatori. Occorre simulare lo svolgimento successivo della partita e dividere la posta in parti proporzionali alle probabilità di vittoria dei giocatori al momento in cui il gioco è stato interrotto.

Anna può vincere la partita in un unico modo: facendo 7 croci di fila. Dunque la sua probabilità di vittoria è $(1/2)^7 = 0.0078125$ (circa 0.78%). Dunque Barbara ha probabilità di vittoria circa 0.9922 (circa 99%).

Divisione della posta:

Anna 0.0078×100 euro = 0.78 euro
Barbara 0.9922×100 euro = 99.22 euro.

Tabella delle frequenze1 (Barbara e Mica)

Tabella delle frequenze

Numero consegne (su 100)	Anna	Barbara	Carlo	Davide	Totale
	40	20	20	20	100

Tabella delle scelte

Percorso/Corriere	Anna	Barbara	Carlo	Davide
Strada della vita	25%	100%	50%	50%
Strada della morte	75%	0%	50%	50%

In mancanza di altre informazioni si assumono le frequenze relative empiriche come valori approssimati delle frequenze teoriche.

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

La probabilità di un evento E può essere condizionata dal verificarsi di un evento F.

Ad esempio l'evento E: "Il corriere sceglie la strada della vita" è certo solo se si verifica F_1 : "il corriere è Barbara", mentre ha probabilità del 25% di verificarsi se si verifica F_2 : "il corriere è Anna".

PROBABILITÀ COMPOSTA

La probabilità che un evento E ed un evento F avvengano contemporaneamente è uguale al prodotto della probabilità di F per la probabilità di E condizionata al verificarsi di F.

Ad esempio la probabilità che il corriere prenda la strada della vita è:
 $25\% \times 40\% = 10\%$ quando il corriere è Anna,
 $100\% \times 20\% = 20\%$ quando il corriere è Barbara.

Frequenze dei percorsi

Percorso/Corriere	Anna	Barbara	Carlo	Davide
Strada della vita	10%	20%	10%	10%
Strada della morte	30%	0%	10%	10%

LEGGE 3

La probabilità della somma di esiti incompatibili è la somma delle probabilità.

Calcolo e significato dei margini della tabella

Percorso/Corriere	Anna	Barbara	Carlo	Davide	
Strada della vita	10	20	10	10	50%
Strada della morte	30	0	10	10	50%
	40%	20%	20%	20%	100%

Margine orizzontale

Qualunque numero tu abbia scritto nelle due caselle di ogni singola colonna, il numero nella casella gialla, che ne è la somma, è uguale alla probabilità che esca il corrispondente corriere

Margine verticale

I numeri scritti nel margine verticale danno la probabilità totale che il corriere segua la strada della vita o la strada della morte.

Conclusione del problema di decisione: per Mica, che ignora chi sia il corriere, i due percorsi hanno la stessa probabilità di essere scelti. Se vuole agire, non le resta che gettare una moneta.

Tabella delle frequenze2 (Barbara e Mica)

La notizia dell'improvviso licenziamento di Anna, cambia la tabella

Frequenze dei percorsi

Percorso/Corriere	Anna	Barbara	Carlo	Davide	
Strada della vita		20	10	10	40
Strada della morte		0	10	10	20
					60

Ovvero

Nuove frequenze empiriche

Percorso/Corriere	Anna	Barbara	Carlo	Davide	
Strada della vita		1/3	1/6	1/6	2/3
Strada della morte		0	1/6	1/6	1/3
					1

Conclusione del problema di decisione: nonostante Mica ignori ancora chi sia il corriere, l'informazione del licenziamento di Anna le consente di affermare che i due percorsi non hanno più la stessa probabilità di essere scelti, la probabilità che sia scelta la strada della vita è doppia della probabilità che sia scelta la strada della morte.

Scena Finale (Barbara e Claudio)

6 lanci di un unico dado

Gli esiti dei sei lanci sono indipendenti l'uno dall'altro, per cui in ogni lancio la probabilità che NON esca 1 è la stessa, cioè $5/6$ e la probabilità che NON esca 1 in nessuno dei 6 lanci è dunque $(5/6)^6 = 15625/46656$, cioè circa il 33.5%.

Conclusione : Barbara potendo permettersi economicamente di lanciare il dado altre 3 volte oltre alle prime 3, può eseguire una sequenza di 6 lanci. La probabilità che 1 esca almeno una volta in 6 lanci è circa 66.5%. Ovviamente Barbara potrebbe perdere ancora, perché non è certo che 1 esca né in 6 lanci né in 100 lanci, essendo l'esito di ogni lancio indipendente da quello di tutti i lanci precedenti, ma a noi è piaciuto pensare che la storia di Barbara si concluda positivamente.

Considerazioni sull'opera teatrale "Il caso, probabilmente: la partita a dadi"

L'opera inizia con una partita a dadi in cui la posta è il destino di una donna, la protagonista, Barbara. La conclusione della partita non dipende solo dall'esito dei lanci ma dalla reazione di Barbara di fronte alla sconfitta e, da ultimo, alla vittoria.

Dalla scena iniziale si dipartono delle alternative come nel gioco dei dadi e ogni alternativa porta ad una conclusione: il suicidio, la vita da fuorilegge, una vita faticosa con un lavoro pericoloso e, da ultimo, la salvezza.

Attraverso l'esperienza delle alternative, Barbara acquista consapevolezza di come il caso risponda a delle regole, conoscendo le quali si possono fare delle previsioni su quel che avverrà. Quando, attraverso l'incontro-scontro di due possibili destini, Barbara si ricompone, avviene un corto circuito da cui affiorano alla coscienza gli insegnamenti della capobanda Mica che portano la protagonista ad una diversa concatenazione di eventi dall'esito fortunato.

L'opera finisce con la ripresa della partita a dadi, dove l'opportunità di proseguire i tre lanci iniziali dà a Barbara la vittoria. Ci è piaciuto credere in questo finale confortante e se la probabilità è la misura della fiducia che abbiamo nel verificarsi di un evento, la probabilità che la partita finisse con la vittoria di Barbara per noi era davvero grande.