Scuola estiva di Matematica Applicata

13-18 Giugno, 2016, Milano

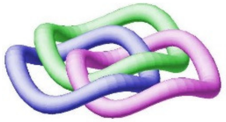
POLITECNICO DI MILANO

GEOMETRIA PARAMETRICA 3D

Strumenti di base e applicazioni

Franca Caliò, Elena Marchetti

Dipartimento di Matematica – Politecnico di Milano



Curve 3D in forma parametrica

Equazione vettoriale

$$c = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \quad t \in D$$

Equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \quad t \in D \\ z = h(t) \end{cases}$$

Dove**:**

f(t), g(t), h(t) sono funzioni reali di variabile reale,

t (il parametro) è la variabile indipendente;

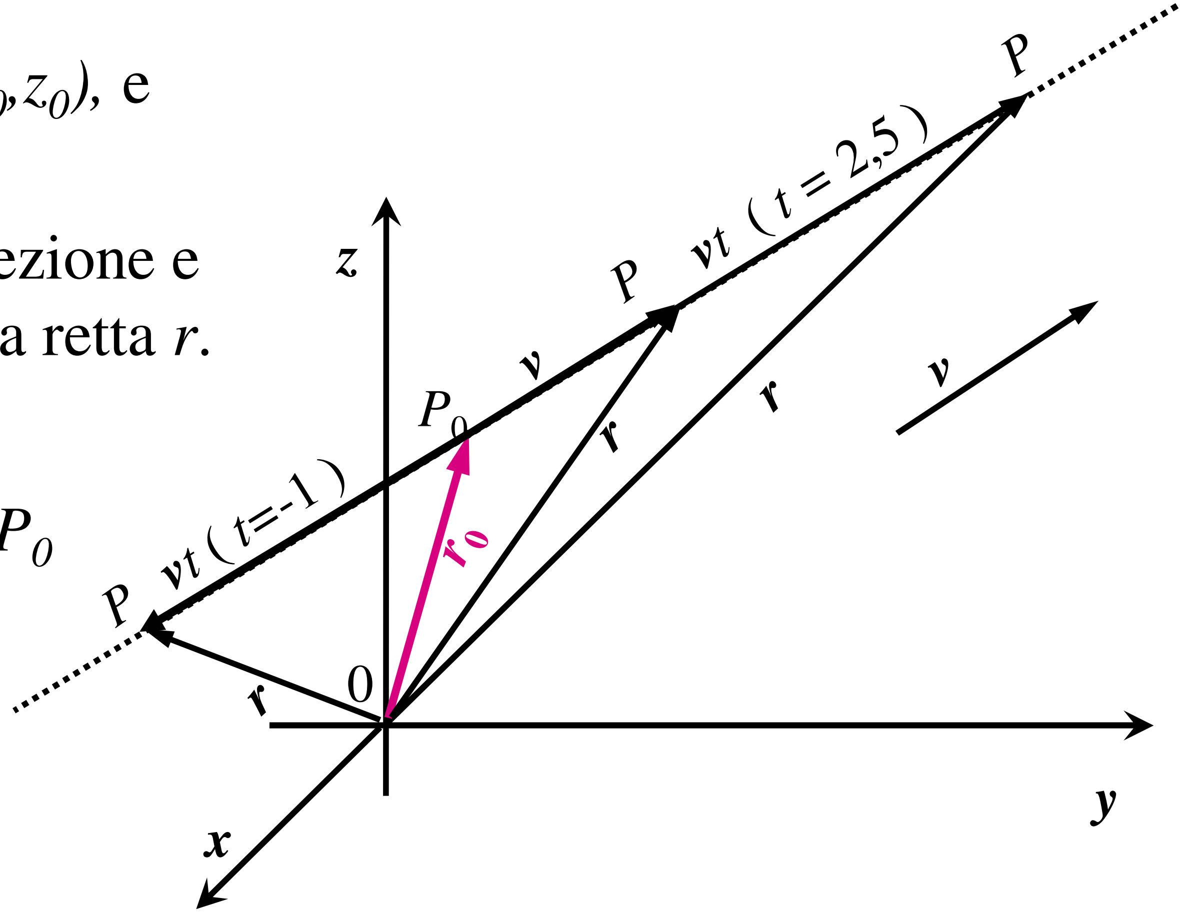
D è l'intersezione degli insiemi di definizione delle tre funzioni.

Sono dati un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$, e un vettore $\boldsymbol{v} = [v_x,v_y,v_z]^T$.

Il vettore $\boldsymbol{v}$ definisce la direzione e P_0 il punto di origine di una retta r.

Applichiamo il vettore $\boldsymbol{v}$ a P_0

"Stiriamo" il vettore $\boldsymbol{v}$



Al variare del parametro t in R il punto P, punto rappresentatore del vettore somma $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v}t$, descrive la retta passante per P_0 e di direzione $\boldsymbol{v}$

da cui **l'equazione parametrico-vettoriale della retta**:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \\ z_0 + v_z t \end{bmatrix} \quad t \in R}$$

e le **equazioni parametriche scalari della retta:**

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \quad t \in R \\ z = z_0 + v_z t \end{cases}}$$

Il punto P_0 ,di coordinate $x_0\ y_0\ z_0$, è detto **punto origine** della retta, il vettore $\boldsymbol{v}$ è detto **vettore di direzione** della retta, le sue componenti $v_x\ v_y\ v_z$ **coefficienti direttori**.

Trasformazioni affini in 3D

Una trasformazione affine è algebricamente definita da

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

e la sua struttura è

Vettore da trasformare

Vettore di traslazione

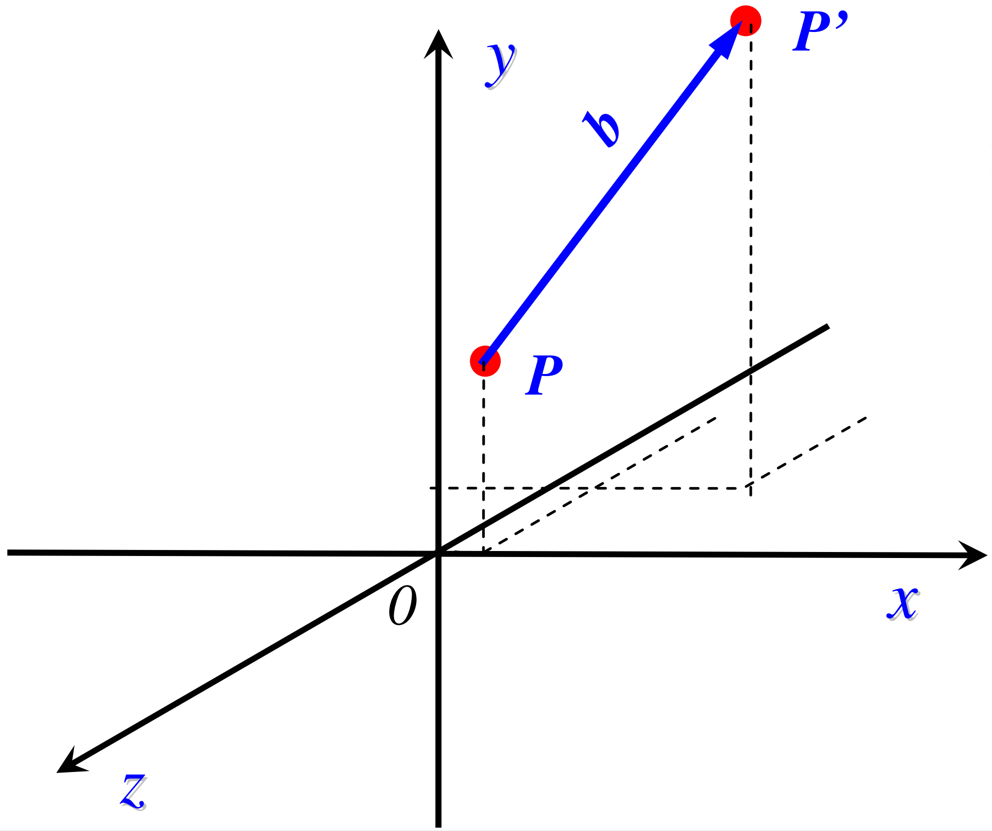
Matrice di trasformazione

Vettore trasformato

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Traslazione in 3D (1)

È una trasformazione geometrica che ad ogni punto *P* dello spazio fa corrispondere un punto *P’* tale che il vettore spostamento *P’- P* sia uguale a ***b*** *(vettore di traslazione che caratterizza direzione, verso e intensità della traslazione)*.



isometria priva di punti uniti

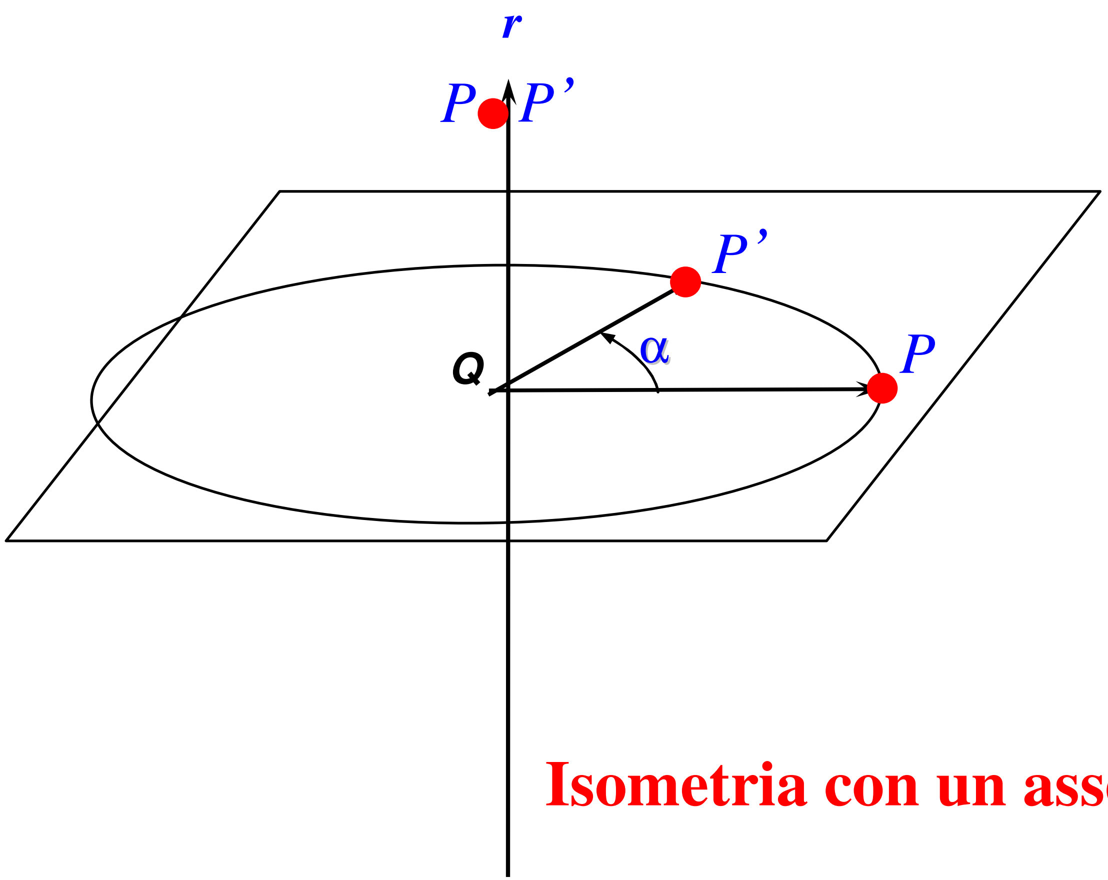
Traslazione in 3D (2)

Algebricamente si esprime:

Matrice unità ***Vettore traslazione***

$$A = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \boldsymbol{b} = \boxed{\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}}$$

Rotazione in 3D (1)



È una trasformazione che:

• a P appartenente ad r fa corrispondere se stesso;

• a P non appartenente ad r fa corrispondere P' appartenente al piano passante per P perpendicolare ad r e che interseca r in un punto Q.

• la distanza di P da Q coincide con la distanza di P' da Q.

• l'angolo formato dalle due semirette s ed s' passanti rispettivamente da Q, P e da Q, P' è α, angolo di rotazione

Isometria con un asse di punti uniti

Rotazione in 3D (2)

Algebricamente si esprime (a titolo di esempio)

Matrice di rotazione:
asse z , angolo α

Vettore traslazione

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Omotetia in 3D (1)

Una **trasformazione omotetica di centro *Q*** che:

- fa corrispondere al punto Q se stesso
- ad un punto P, distinto da Q, un punto P' tale che Q, P, P' siano allineati e che $QP'=kQP$ con $k \in R$, $k \neq 0, 1, -1$(***k*** si dice **ragione** di omotetia).

L'effetto di un'omotetia è la modificazione delle distanze fra punti attraverso il numero k: fattore di proporzionalità.

$|k|>1$ dilatazione, $|k|<1$ contrazione

non isometria, con un punto unito

Omotetia in 3D (2)

algebricamente si esprime *(se il centro di omotetia è l'origine):*

Matrice di omotetia

Vettore traslazione

$$A = \boxed{\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}} \qquad \boldsymbol{b} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$k \in R$, $k \neq 0$, 1,- 1

Scaling in 3D

uno scaling differente nelle tre direzioni *x, y, z* algebricamente si esprime *:*

Matrice di scaling

Vettore traslazione

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$k, h, l \in R$, $k, h, l \neq 0$ $e \neq 1, -1$ *(contemporaneamente)*

Una traslazione continua e uniforme *(costante in direzione e variabile in verso e intensità)* si definisce algebricamente

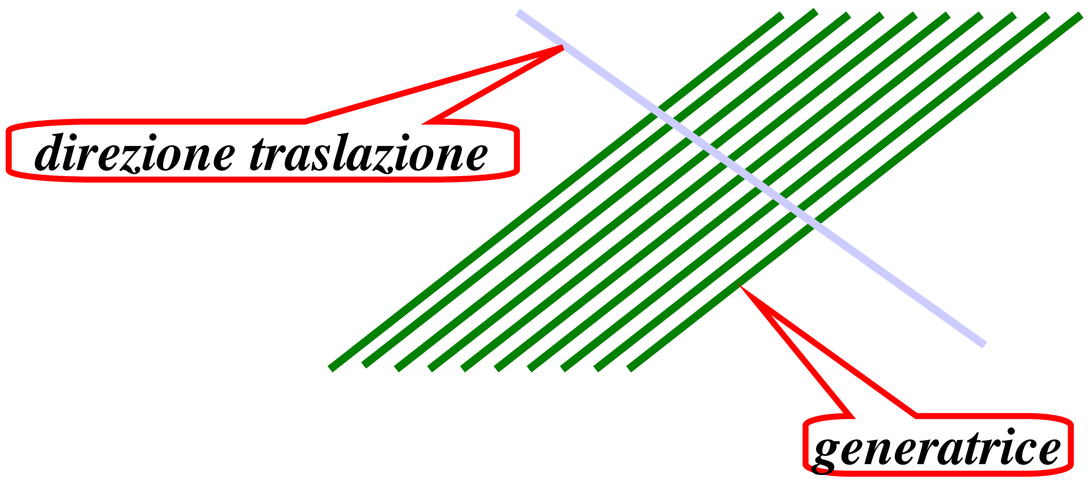
Matrice unità

Vettore traslazione

$$A = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \boldsymbol{b} = \boxed{\begin{bmatrix} b_x u \\ b_y u \\ b_z u \end{bmatrix}}$$

Parametrizzazione di un piano (1)

Un piano si può interpretare come una superficie ottenuta per traslazione di una retta secondo una legge di traslazione uniforme, in altre parole traslazione di una retta lungo un'altra retta.



Parametrizzazione di un piano (2)

Matrice unità

Retta generatrice (vettore da trasformare)

Vettore di traslazione

Vettore posizione del piano

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \\ z_0 + v_z t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x u \\ b_y u \\ b_z u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_x t + b_x u \\ y_0 + v_y t + b_y u \\ z_0 + v_z t + b_z u \end{bmatrix}$$

Pertanto le equazioni parametriche del piano:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + v_x t + b_x u \\ y = y_0 + v_y t + b_y u \qquad t \in R \quad u \in R \\ z = z_0 + v_z t + b_z u \end{cases}}$$

Traslazione lungo una curva

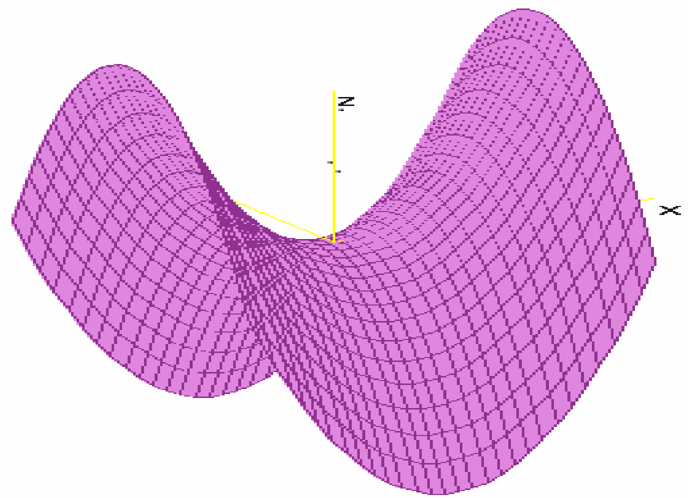
Una traslazione continua il cui vettore di traslazione è definito punto per punto da una data curva si definisce algebricamente

Matrice unità

Vettore traslazione

$$A = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \boldsymbol{b} = \boxed{\begin{bmatrix} f(u) \\ g(u) \\ h(u) \end{bmatrix}}$$

Parametrizzazione di un paraboloide iperbolico (1)



Il paraboloide iperbolico è generato per **traslazione** di una **parabola** su un'altra **parabola** appartenente ad un piano ortogonale a quello cui appartiene la prima

parabola del piano zx, concavità verso l'alto (parabola direttrice, vettore posizione = vettore di traslazione)

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ u^2 \end{bmatrix} u \in [u_1, u_2]$$

parabola del piano yz, concavità verso il basso (parabola generatrice)

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -t^2 \end{bmatrix} \quad t \in [t_1, t_2]$$

Parametrizzazione di un paraboloide iperbolico (2)

Matrice unità ***parabola generatrice*** ***parabola direttrice*** ***Vettore posizione del paraboloide iperbolico***

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ t \\ u^2 - t^2 \end{bmatrix}$$

Di qui le equazioni parametriche del paraboloide iperbolico:

$$\boxed{\begin{cases} x = u \\ y = t \qquad t_1 \le t \le t_2 \quad u_1 \le u \le u_2 \\ z = u^2 - t^2 \end{cases}}$$

Paraboloide iperbolico in Architettura

Teatro Regio di Torino: Bertone 1973

Paraboloidi iperbolici nel quotidiano

patatine Pringles – forse i più diffusi paraboloidi iperbolici

Parametrizzazione di una superficie sferica

Matrice di rotazione di asse z (asse polare)

***Generatrice** (semi meridiano - semicirconferenza)*

Vettore di traslazione

Vettore posizione della sup sferica

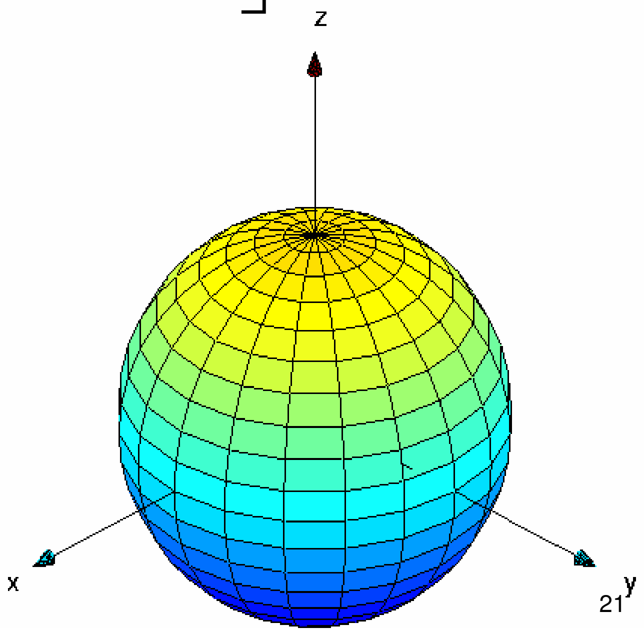
$$\begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r\cos t \\ r\sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin u \sin t \\ r\cos u \cos t \\ r\sin t \end{bmatrix}$$

$$-\pi/2 \le t \le \pi/2 \qquad 0 \le u \le 2\pi$$

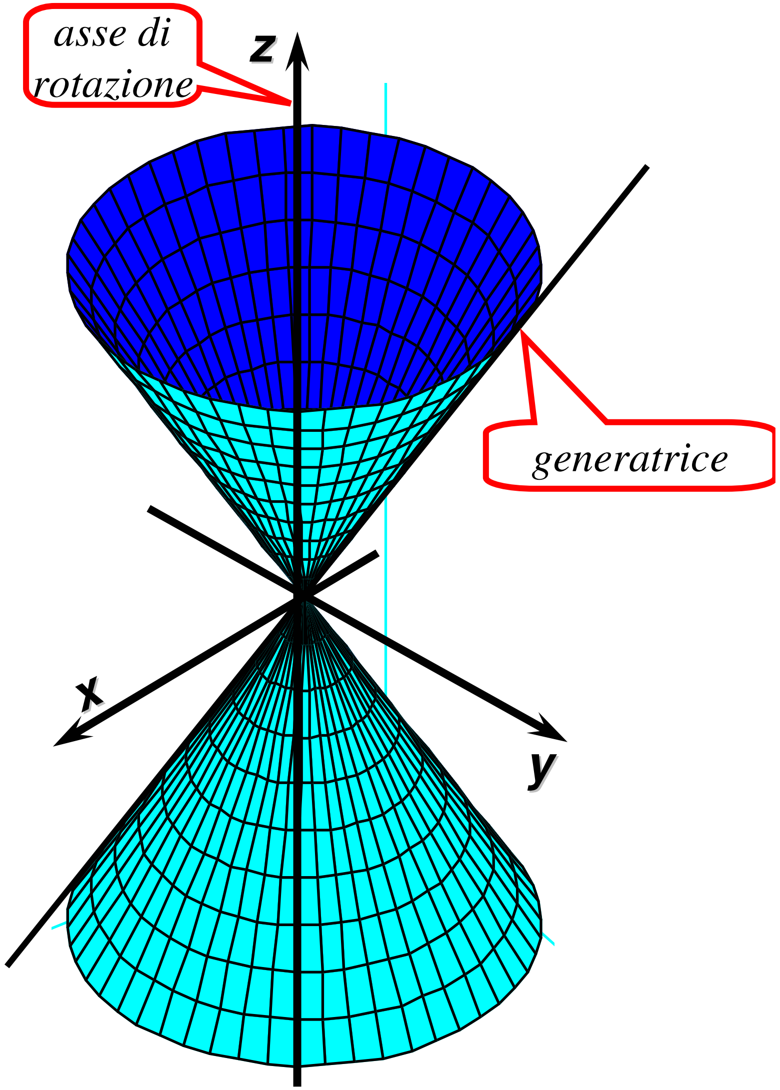
Di qui le equazioni parametriche della superficie sferica

$$\begin{cases} x = -r\sin u \sin t \\ y = r\cos u \cos t \\ z = r\sin t \end{cases}$$

$$-\pi/2 \le t \le \pi/2 \qquad 0 \le u \le 2\pi$$



Parametrizzazione di una superficie conica



Una superficie conica è generabile mediante **rotazione** di una **retta**, attorno ad un **asse che interseca la retta.**

$$\begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_y t \\ v_z t \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} t \in (-\infty, +\infty) \\ u \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = -v_y t \sin u \\ y = v_y t \cos u & 0 \le u \le 2\pi \\ z = v_z t \end{cases}$$

Esempio di superfici di rotazione

Collezione Giò Ponti rivisitata da Richard-Ginory-Gucci-2014; Carlo e Giovanni Moretti- Murano

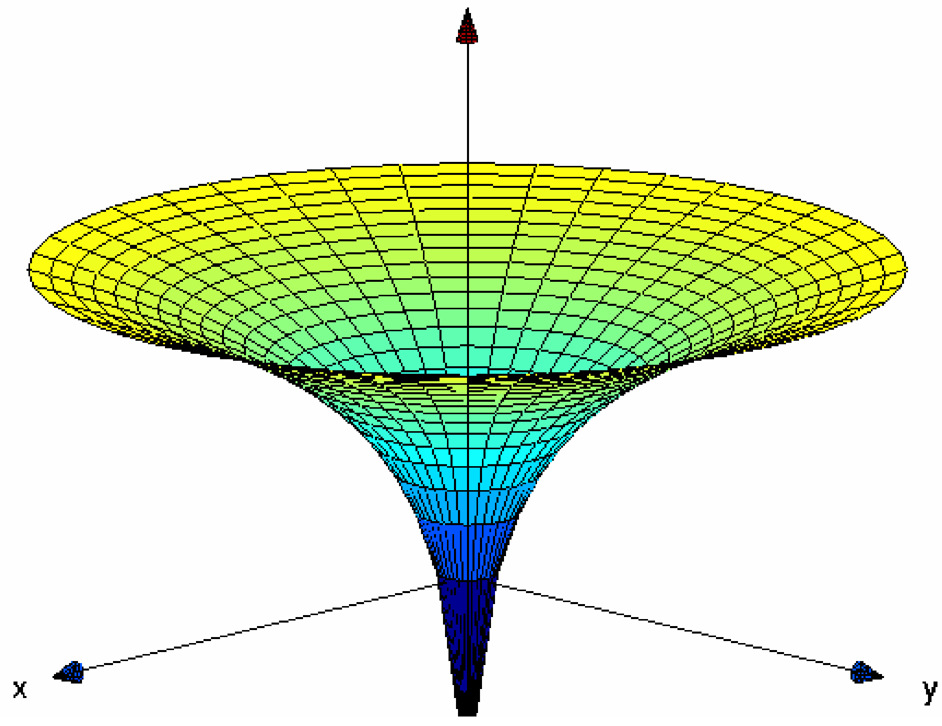
Parametrizzazione di una superficie di rotazione logaritmica

Superficie ottenuta per **rotazione**, attorno all'**asse *z***, di una **curva logaritmica** (appartenente al piano *zx*)

generatrice

$$\begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \log t \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} t \in (0, t_1) \\ u \in [0, 2\pi] \end{array}$$

$$\begin{cases} x = t \cos u \\ y = t \sin u \\ z = \log t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t \in (0, t_1) \\ u \in [0, 2\pi] \end{array}$$



Esempio di superfici di rotazione

Giovannoni: tavolo Bombo

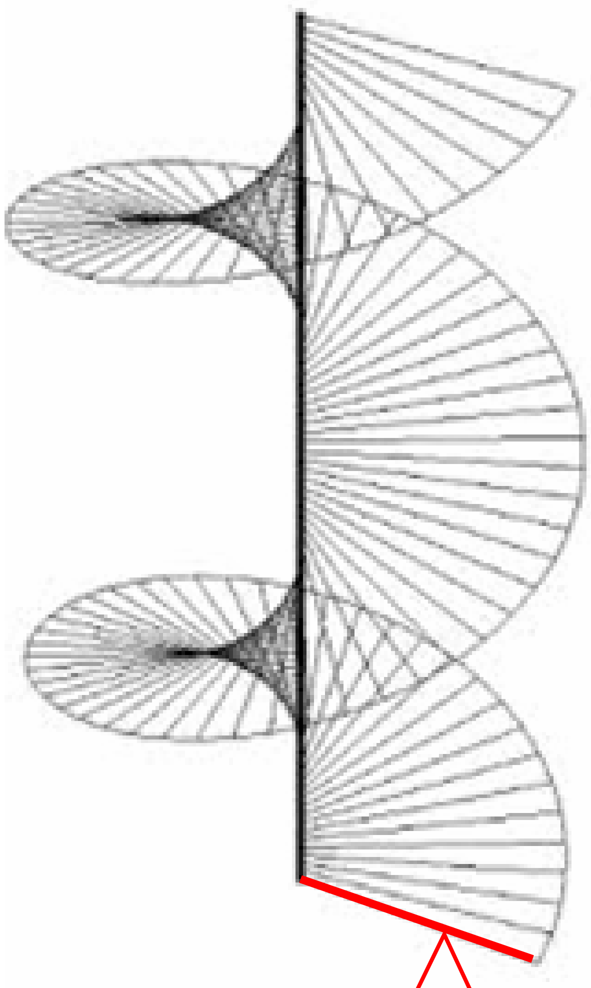
Una combinazione di **rotazione continua lungo *z*** e contemporanea **traslazione uniforme lungo *z*** si definisce algebricamente

Matrice di rotazione

Vettore traslazione

$$A = \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Parametrizzazione di un elicoide rigato



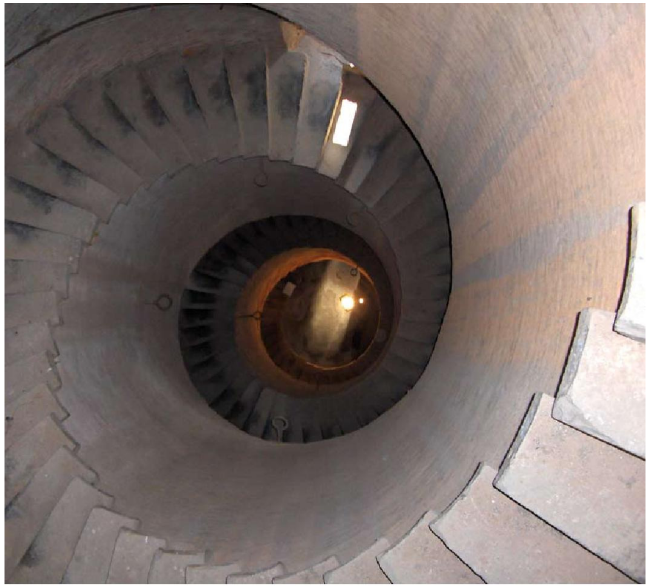
Un elicoide rigato è generabile per **rotazione** di un **segmento** rispetto ad un **asse** ad esso **ortogonale** e contemporanea **traslazione lungo lo stesso**

$$\begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{generatrice}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} u \in [0, u_1] \\ t \in [0, t_1] \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = -t \sin u \\ y = t \cos u \\ z = u \end{cases} \qquad \begin{matrix} u \in [0, u_1] \\ t \in [0, t_1] \end{matrix}$$

Esempio di superficie di rototraslazione

La Pedrera (Gaudì)



Edifici City life

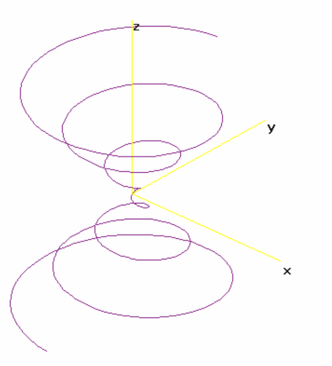
Parametrizzazione di una superficie a spirale

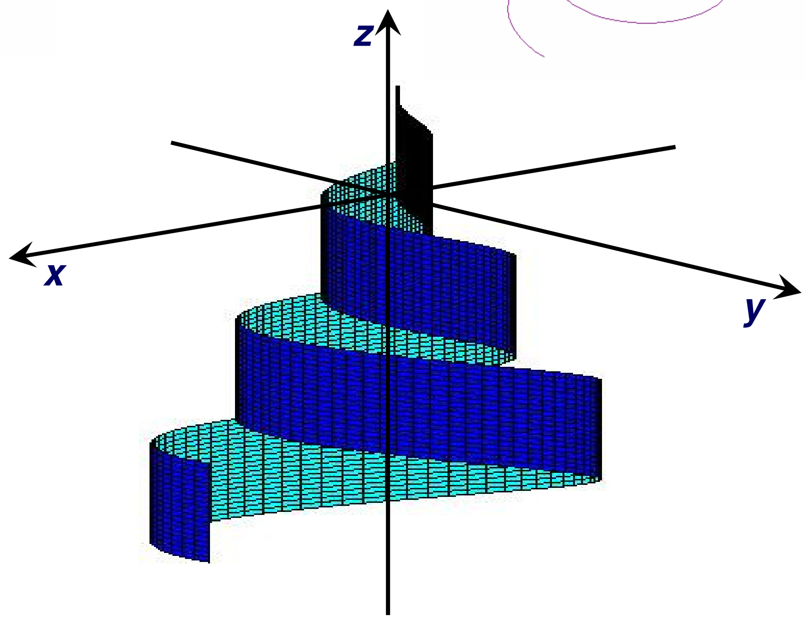
$$\mathbf{e}=\begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{bmatrix} \quad t\in\left[t_1,t_2\right]$$

Una curva spirale gobba si può intendere come una curva ottenuta da una spirale (per esempio archimedea) in cui si aggiunge una componente traslatoria nella direzione ortogonale al piano in cui giace

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} t\in[t_1,t_2] \\ u\in[u_1,u_2] \end{array}$$

generatrice





$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t+u \end{cases} \quad \begin{array}{l} t\in[t_1,t_2] \\ u\in[u_1,u_2] \end{array}$$

Esempi di superfici a spirale

Torre di Babele (Breughel)

I coni gelato (Giangrande)

Sant'Ivo alla Sapienza (Borromini)

Edificio Unicredit