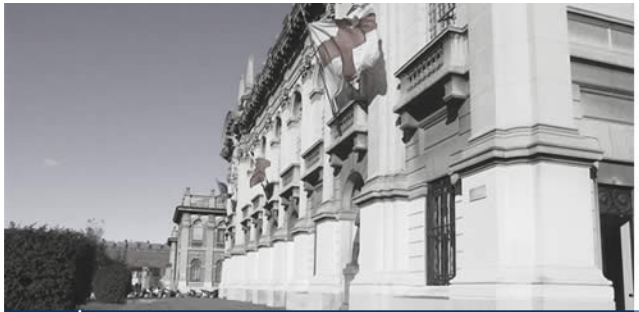


Scuola estiva di Matematica Applicata

13-18 Giugno, 2016, Milano

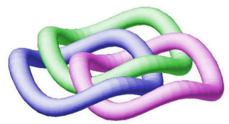
POLITECNICO DI MILANO

DALLA GEOMETRIA ANALITICA ALLA GEOMETRIA PARAMETRICA

Strumenti di base e applicazioni

Franca Caliò, Elena Marchetti

Dipartimento di Matematica – Politecnico di Milano



INDICE

VETTORI 2D

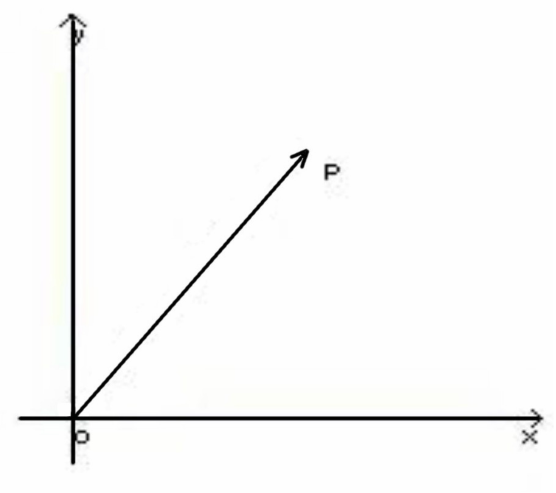
punto nel piano

coordinate cartesiane

(ascissa, ordinata)

$$P(x, y), \quad (x, y \in R)$$

$$P(x, y) \rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

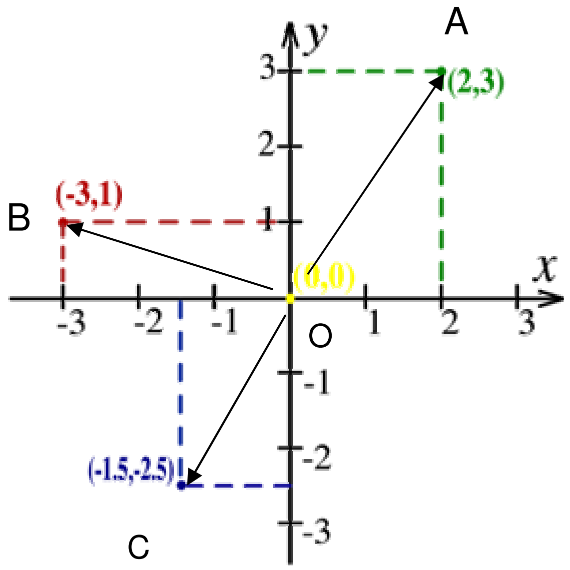


vettore a due componenti

(*direzione*: retta OP, *verso*: da O a P, *modulo*: distanza OP)

$$P = P' \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

VETTORI 2D



$$O(0,0) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(2,3) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B(-3,1) \rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}) \rightarrow \begin{bmatrix} -3/2 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

VETTORI 2D

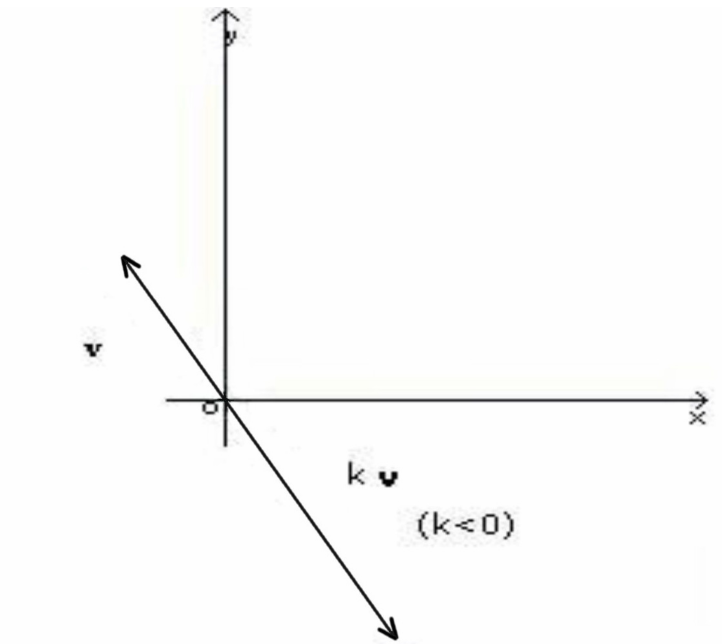
prodotto di un vettore per uno *scalare*

$$k \in R$$

$$P(x, y): \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = k\mathbf{v} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

$$P'(kx, ky): \ \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$



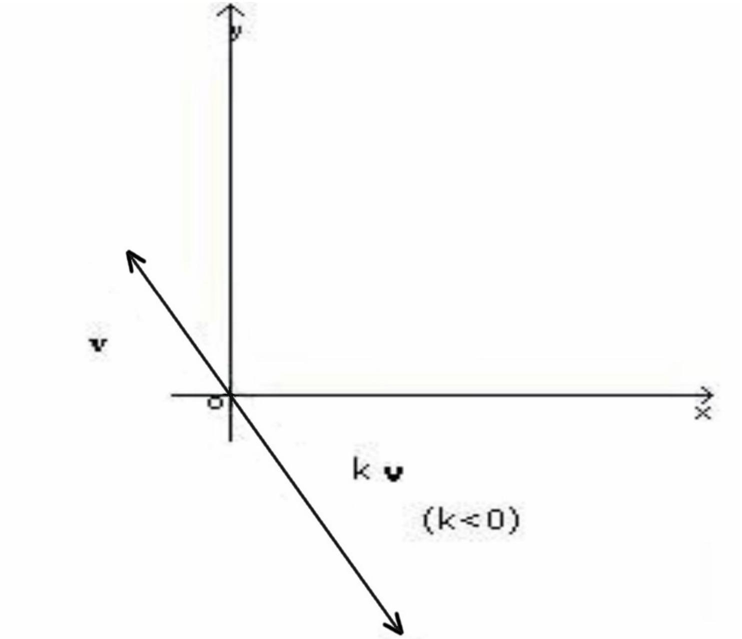
$$P(x, y) \rightarrow P'(kx, ky)$$

UN ESEMPIO

prodotto di un vettore per uno *scalare*

$$k = -2$$

$$P(x, y):\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{v}' = (-2)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$P'(kx, ky):\ \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$P(-3/2, 2) \rightarrow P'(3, -4)$$

VETTORI 2D

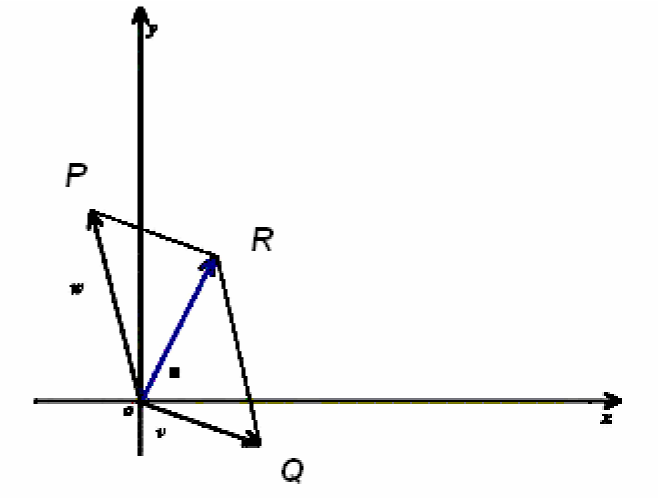
somma tra vettori

$$Q(x, y): \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P(x', y'): \ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$R(x + x', y + y'): \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$



Il punto *R* è il secondo estremo della diagonale del parallelogramma

UN ESEMPIO

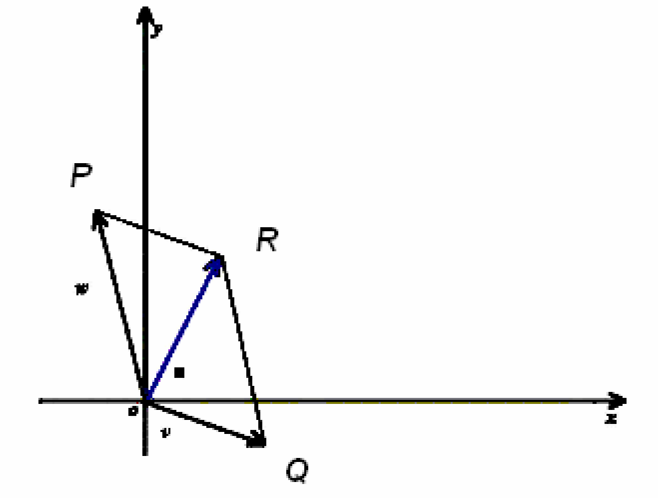
somma tra vettori

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

$$Q(x, y):\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P(x', y'):\ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$R(x + x', y + y'):\ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Il punto *R* è il secondo estremo della diagonale del parallelogramma

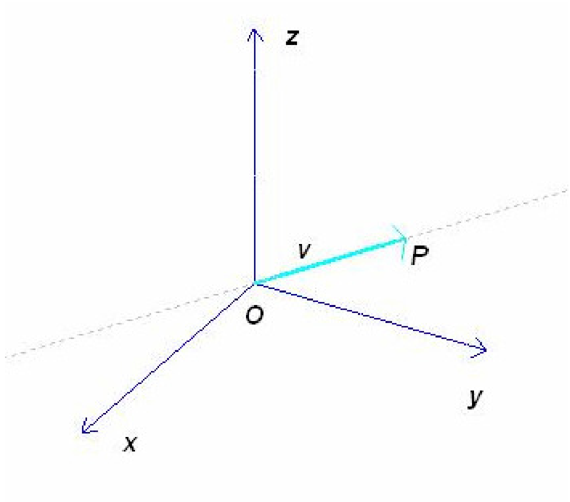
VETTORI 3D

punto nello spazio, coordinate cartesiane:

ascissa, ordinata, quota

$$P(x, y, z), \quad (x, y, z \in R)$$

$$P(x, y, z) \rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



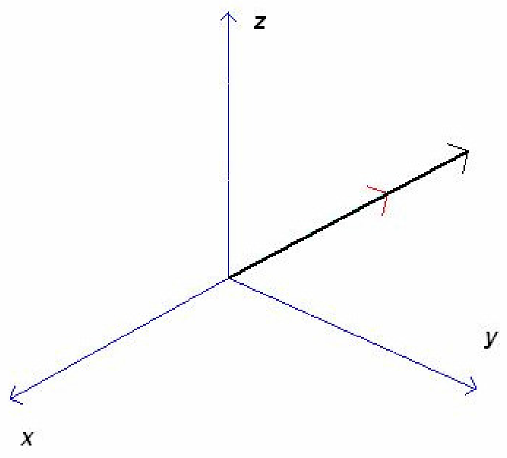
$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} (\text{vettore trasposto})$$

Osservazione: $P(x, y, 0) \rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ appartiene al piano *xy*

VETTORI 3D

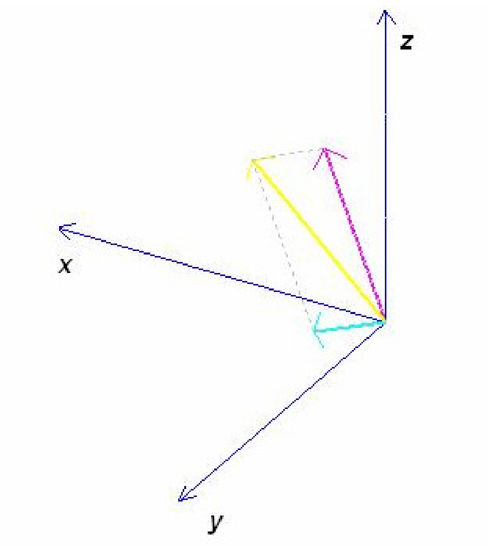
prodotto di un vettore per uno scalare

$$\mathbf{v}' = k\mathbf{v} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix}, \quad k \in R$$



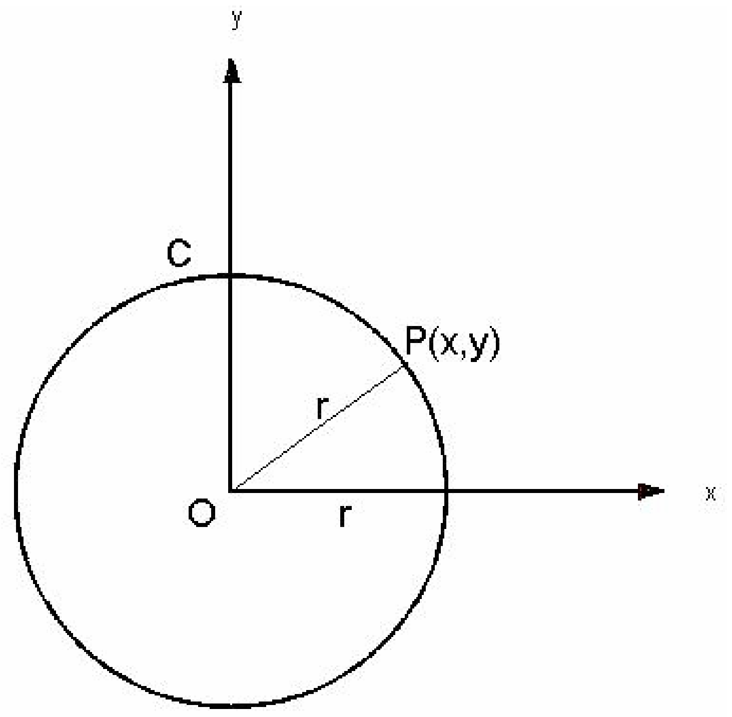
somma tra vettori

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{bmatrix}$$



CURVE IN FORMA CARTESIANA

$$P(x, y) \in C : x^2 + y^2 = r^2$$



Curva intesa come ***luogo geometrico***

Curva "statica"

Conviene cambiare "punto di vista": C è descritta dal punto P che ruota attorno al centro

CURVE IN FORMA PARAMETRICA

$$P(x, y) \in C : x = r\cos(t),\ y = r\sin(t), 0 \le t < 2\pi$$

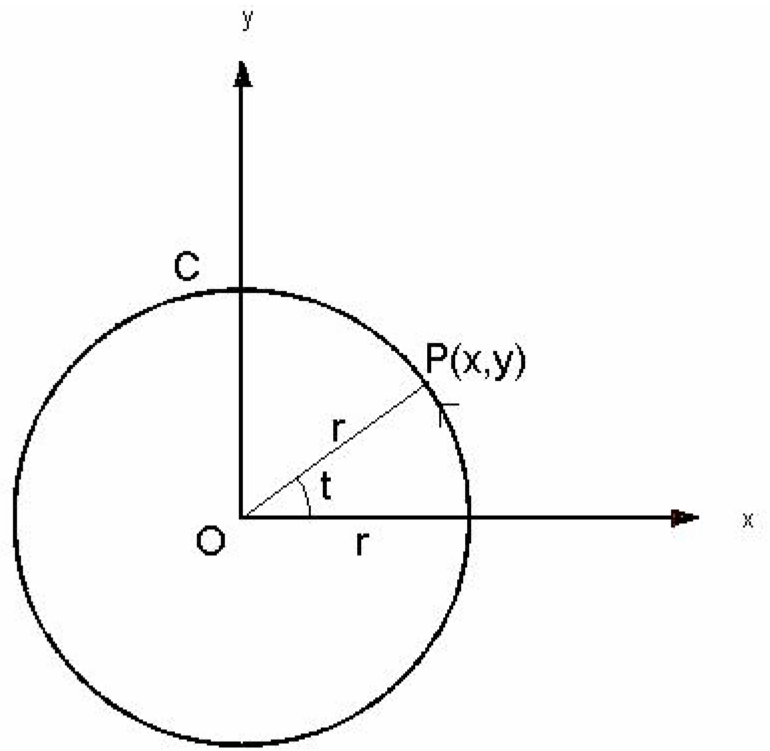
le coordinate di P variano al variare di t (**parametro**)

Curva intesa come ***traiettoria***

Curva ***orientata***

Curva "dinamica"

$$P \in C : \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{bmatrix}, 0 \le t < 2\pi$$



CURVE IN FORMA PARAMETRICA

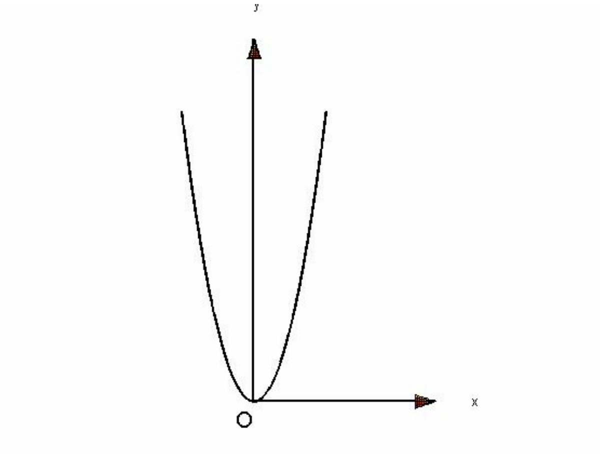
Attenzione: la stessa curva può avere diverse parametrizzazioni

$$P(x,y)\in C : x = r\cos(2t),\ \ y = r\sin(2t), 0\le t<\pi$$

$$P\in C : \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(2t) \\ r\sin(2t) \end{bmatrix}, 0\le t<\pi$$

Tutte le curve del piano cartesiano possono essere parametrizzate.

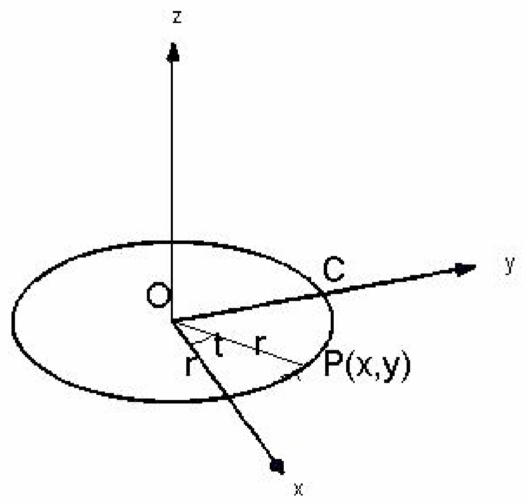
$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, -\infty < t < +\infty$$

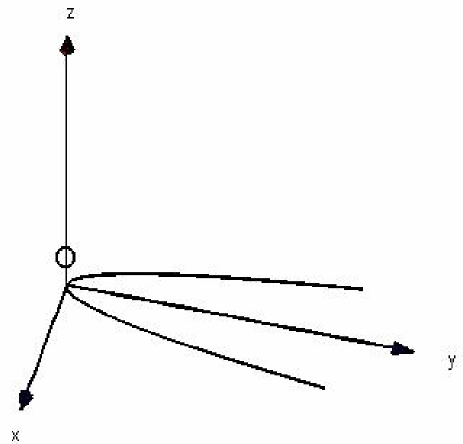


CURVE IN FORMA PARAMETRICA

Una curva del piano cartesiano si può anche considerare nello spazio tridimensionale (quota =0)

$$P \in C : \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \le t < 2\pi$$





$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix}, -\infty < t < +\infty$$

CURVE 3D IN FORMA PARAMETRICA

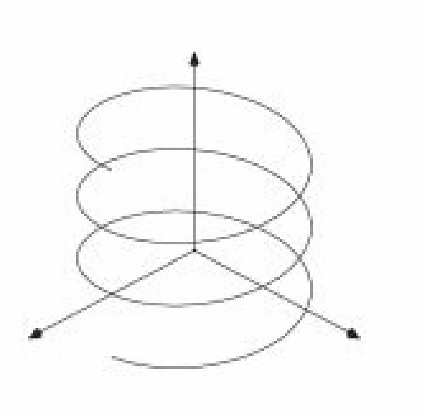
$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I \quad (I \subseteq R) \qquad \to P(x(t), y(t), z(t))$$

punto dello spazio, coordinate
dipendenti da una variabile (parametro)

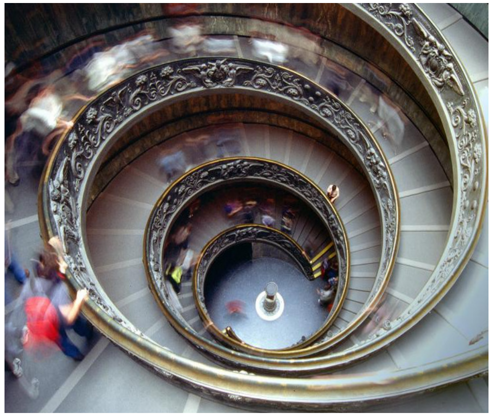
curva orientata (traiettoria)

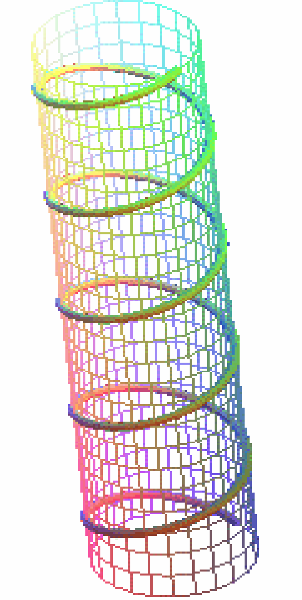
CURVE 3D IN FORMA PARAMETRICA

$$\mathbf{v}(t)=\begin{bmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t\in R$$



elica cilindrica





SPIRALI (CURVE PIANE)

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \rho(t)\cos t \\ \rho(t)\sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in R$$

circonferenza $\rho(t) = r$

spirale di Archimede $\rho(t) = t$

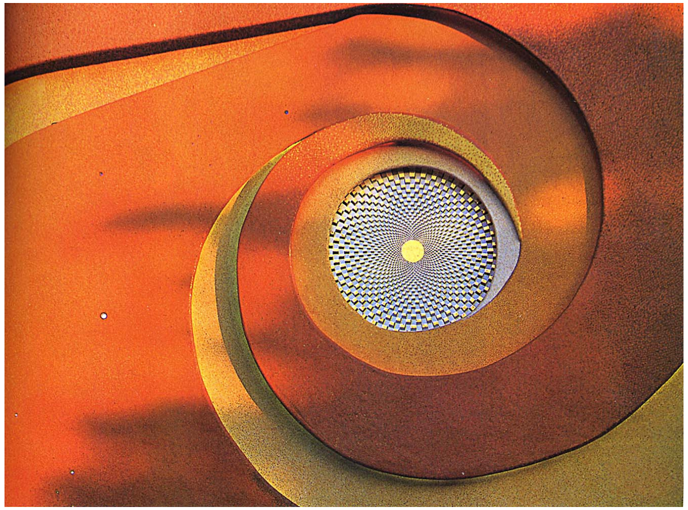
spirale logaritmica $\rho(t) = e^{at}, \quad (a \in R)$

spirale iperbolica $\rho(t) = 1/t \quad (t \neq 0)$

Spirale di Archimede

Spirale iperbolica

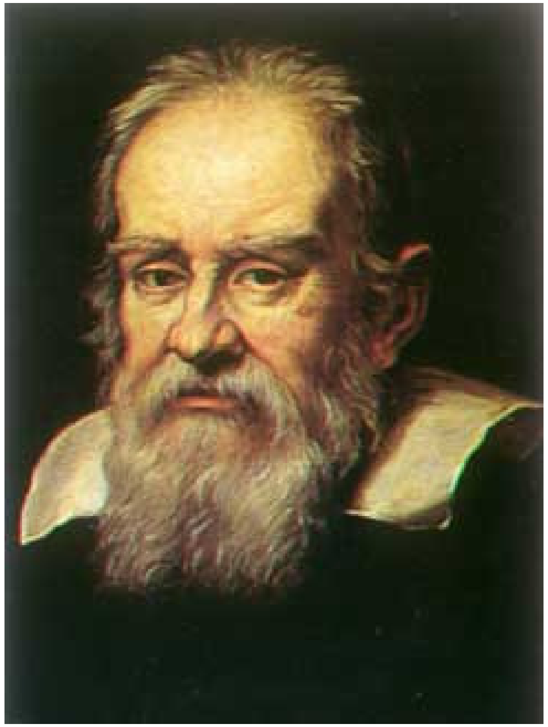
Spirale logaritmica

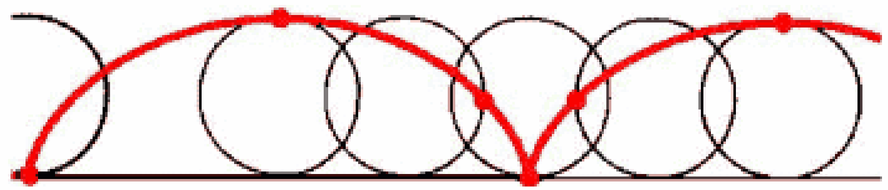


CICLOIDE

Tracciata da un punto di una circonferenza che rotola su una retta

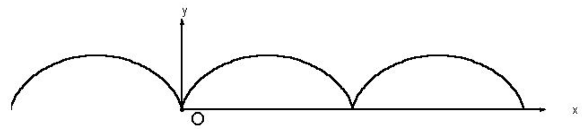
soluzione del problema della ***brachistocrona (G. Galilei)***





CICLOIDE

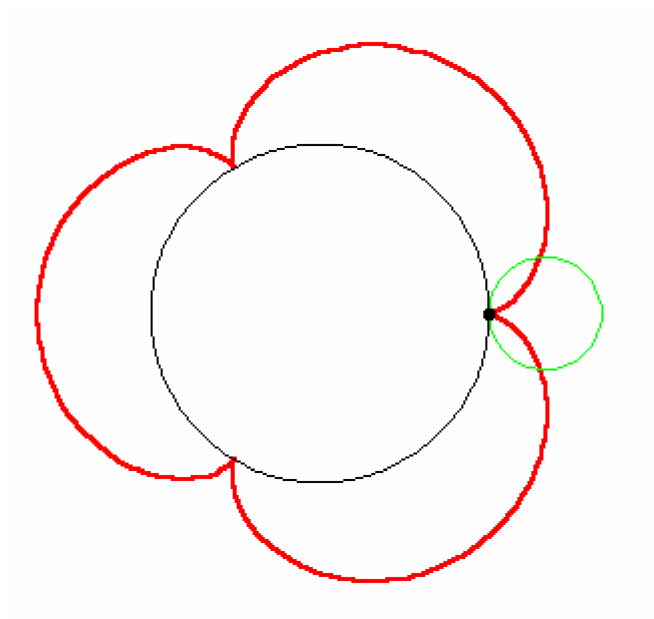
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{bmatrix}, t \in R$$



EPICICLOIDE

Tracciata da un punto di una circonferenza (raggio r) che rotola esternamente ad un'altra circonferenza (raggio a)

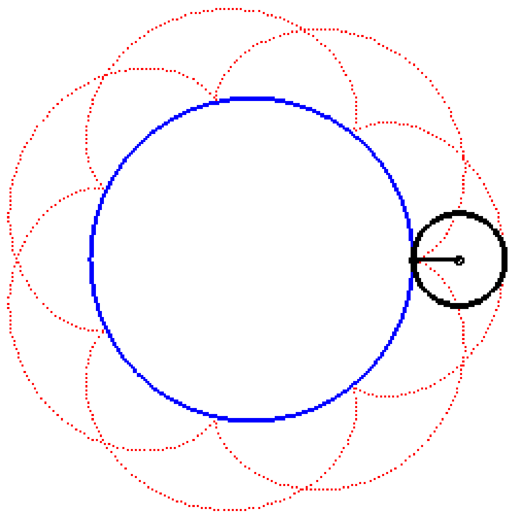
Curve differenti a seconda del rapporto: $q = a/r \quad (r \leq a)$



$q=3$

EPICICLOIDE

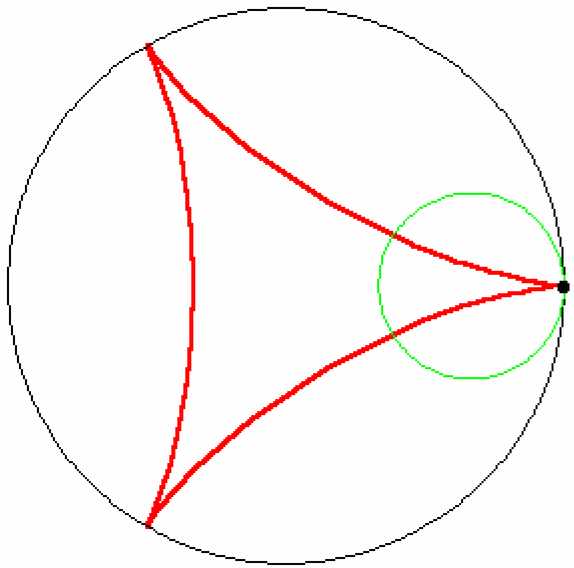
$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} (a+r)\cos t - r\cos(\frac{a+r}{r}t) \\ (a+r)\sin t - r\sin(\frac{a+r}{r}t) \end{bmatrix}, t \in R, a \geq r > 0$$



IPOCICLOIDE

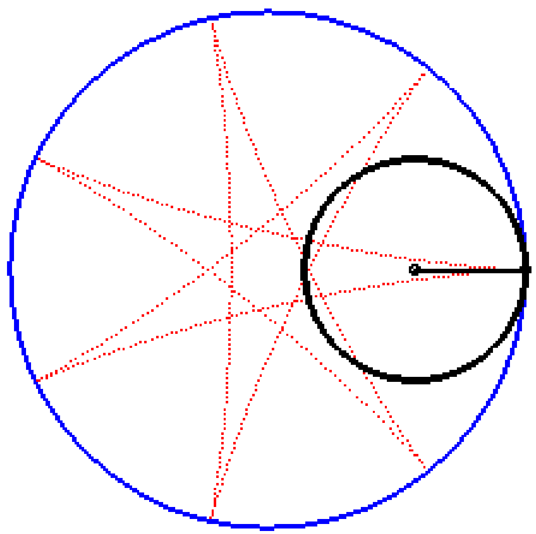
tracciata da un punto di una circonferenza (raggio r) che rotola internamente ad un'altra circonferenza (raggio a)

curve differenti a seconda del rapporto: $q = a/r \qquad r \le a$



IPOCICLOIDE

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} (a-r)\cos t + r\cos(\frac{a-r}{r}t) \\ (a-r)\sin t - r\sin(\frac{a-r}{r}t) \end{bmatrix}, t \in R, a \geq r > 0$$



TRASFORMAZIONI DEL PIANO

LE TRASFORMAZIONI DEL PIANO

Si chiama **trasformazione geometrica piana** una corrispondenza che associa punti del piano a punti dello stesso piano.

Il punto *P'* associato ad un dato punto *P* nella trasformazione *f* è detto corrispondente o immagine o trasformato di *P*.

In simboli:

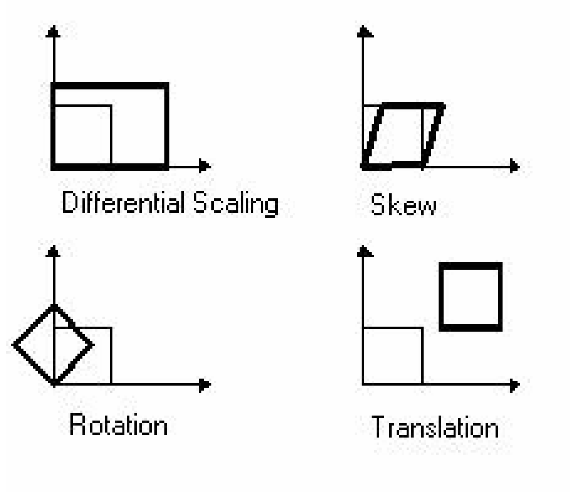
$$P \xrightarrow[f]{} P'$$

TRASFORMAZIONI AFFINI DEL PIANO

rette in rette

si mantiene il parallelismo

- rotazione
- traslazione
- cambiamento di scala (omotetia)
- trasformazione di taglio
- ……..



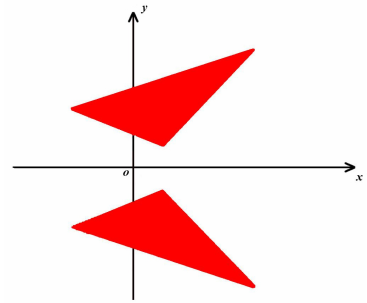
$$P(x, y) \longrightarrow P'(x', y')$$

- composizione di trasformazioni (roto-traslazione, roto-scaling…)

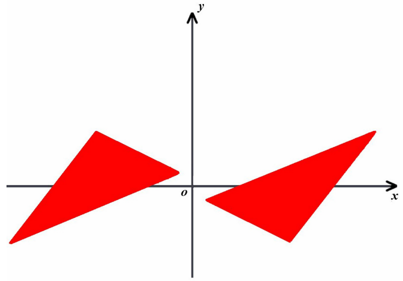
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

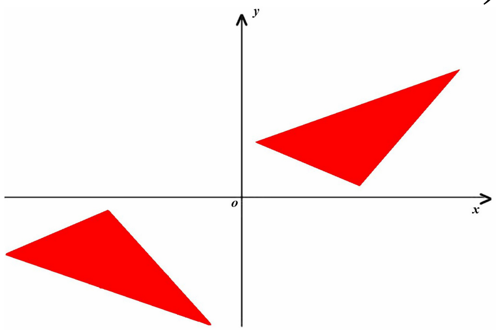
ISOMETRIE

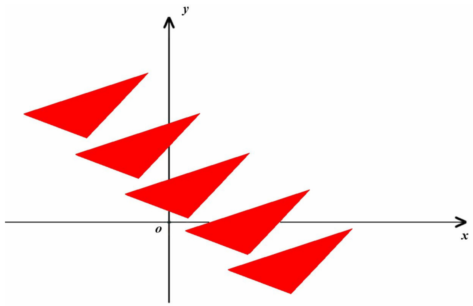
trasformazioni affini che mantengono distanze e angoli

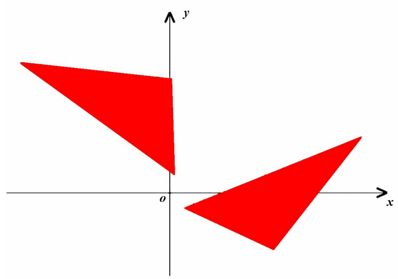


- identità
- riflessione rispetto ad un asse (simmetria assiale)
- riflessione rispetto a un punto (simmetria centrale)
- rotazione attorno ad un punto
- traslazione in una direzione
- glissoriflessione (riflessione con traslazione nella direzione dell'asse)



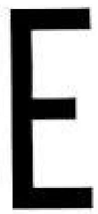


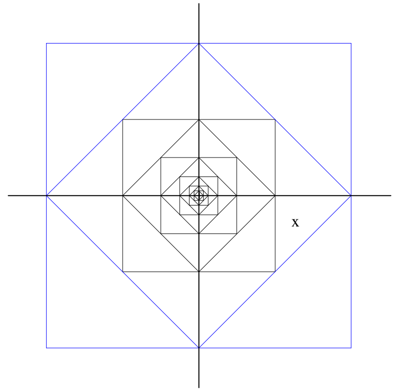


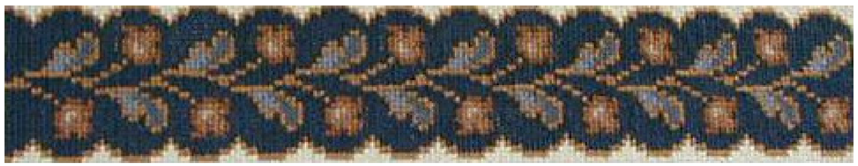


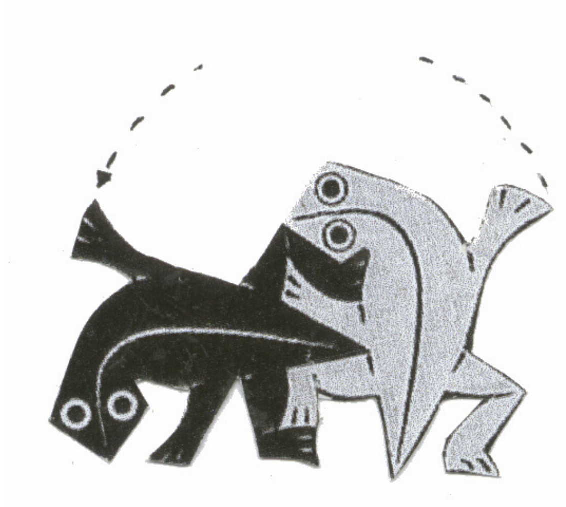
TRASFORMAZIONI AFFINI DEL PIANO

Come rappresentare algebricamente le trasformazioni affini?









MATRICI

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} \in R \ \ (i, j = 1,2)$$

matrice quadrata di ordine 2 (due righe e due colonne)

qualche esempio:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

prodotto matrice-vettore

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Av}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x+a_{12}y \\ a_{21}x+a_{22}y \end{bmatrix}=\mathbf{v}'$$

matrice di trasformazione $\mathbf{v}\xrightarrow{\mathbf{A}}\mathbf{v}'$ $\quad(\mathbf{v}\xrightarrow{\mathbf{I}}\mathbf{v})$

UN ESEMPIO

prodotto matrice-vettore

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) + (-1)(-3) \\ 1/2(1) + 1(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5/2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{v} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{v}'$$

La matrice caratterizza la trasformazione

MATRICI

prodotto tra matrici (righe per colonne)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

UN ESEMPIO

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1/2 \end{bmatrix} \quad , \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)2 + 0(1) & (-1)(-5) + 0(1) \\ 3(2) + 1/2(1) & 3(-5) + 1/2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 13/2 & -29/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -17 & -5/2 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

MATRICI (un’estensione)

•Le matrici quadrate possono essere di dimensione (*nxn*) con *n> 2*

•Le matrici possono essere con numero di righe e colonne diverso (*nxm*)

•Un vettore colonna è una particolare matrice (*nx1*)

•Il prodotto tra matrici è definito solo per matrici *conformabili* (il numero di colonne della prima e il numero di righe della seconda devono essere uguali)

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

!! **BA** non si può effettuare

RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA DI TRASFORMAZIONI DEL PIANO

$$P(x,y) \longrightarrow P'(x',y')$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

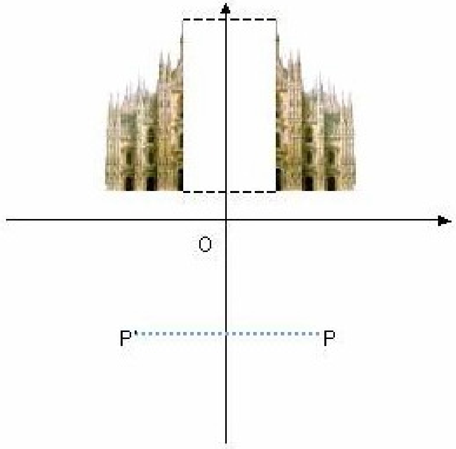
matrice **A** rappresenta la trasformazione
(identità, rotazione, riflessione ….)

b vettore di traslazione

SIMMETRIA ASSIALE $(b_x=b_y=0)$

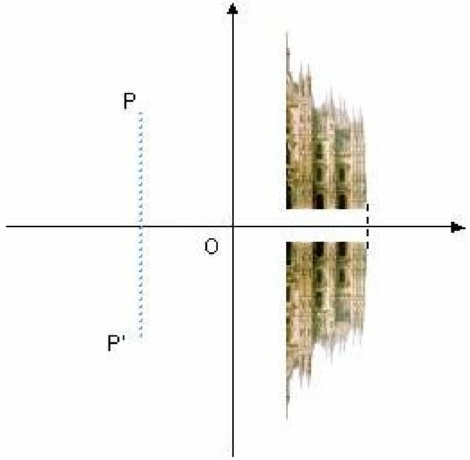
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

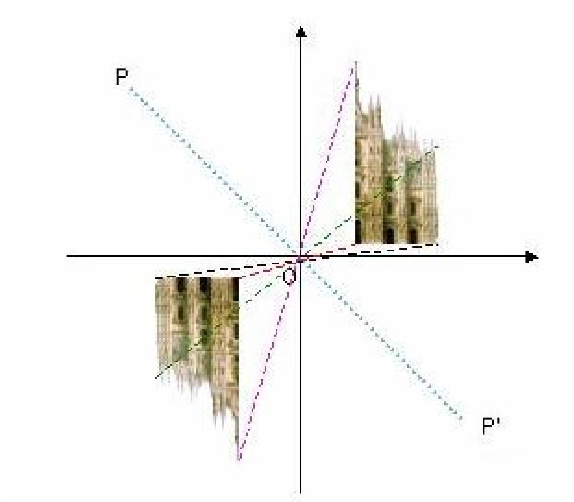
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



SIMMETRIA CENTRALE – ROTAZIONE ($b_x=b_y=0$)

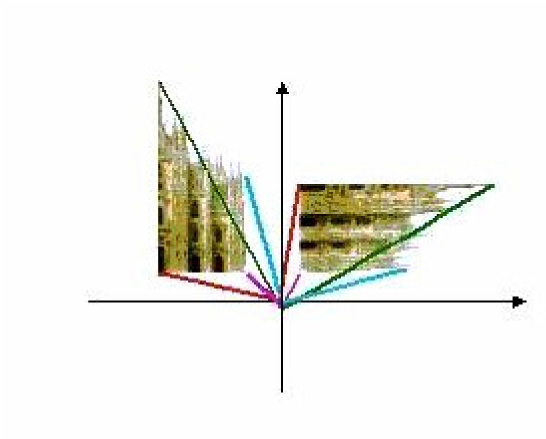
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{cases}$$

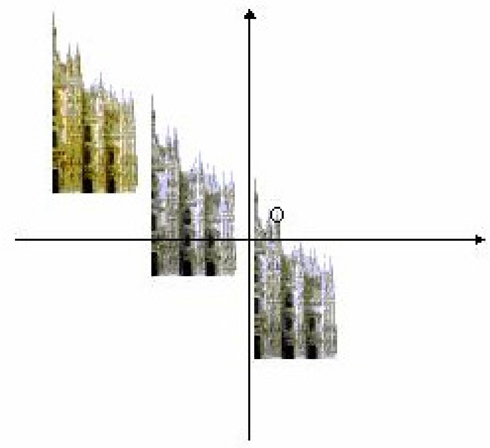


$$\vartheta = \pi/2$$

TRASLAZIONE - GLISSORIFLESSIONE

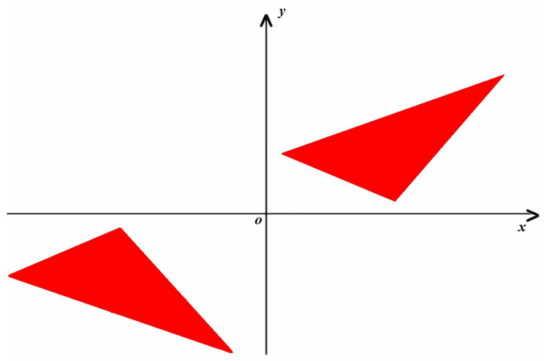
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + b_x \\ y' = y + b_y \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

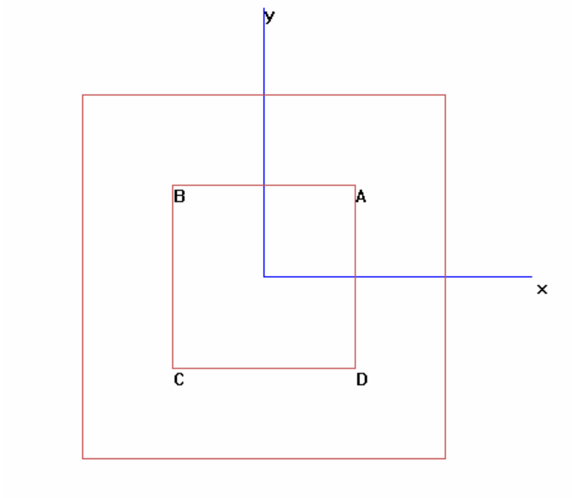
$$\begin{cases} x' = x + b_x \\ y' = -y \end{cases}$$

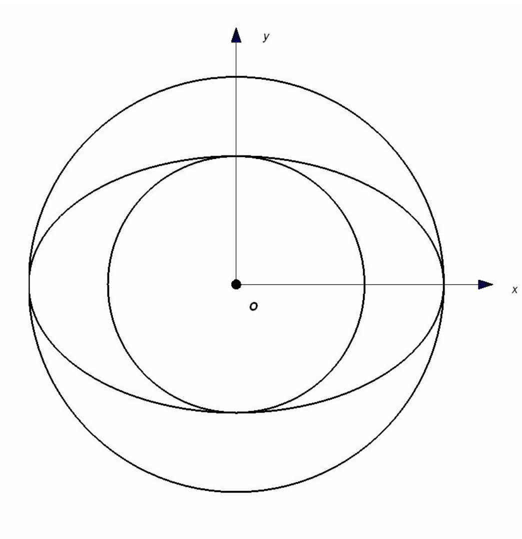


OMOTETIA-CAMBIAMENTO DI SCALA ($b_x=b_y=0$)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

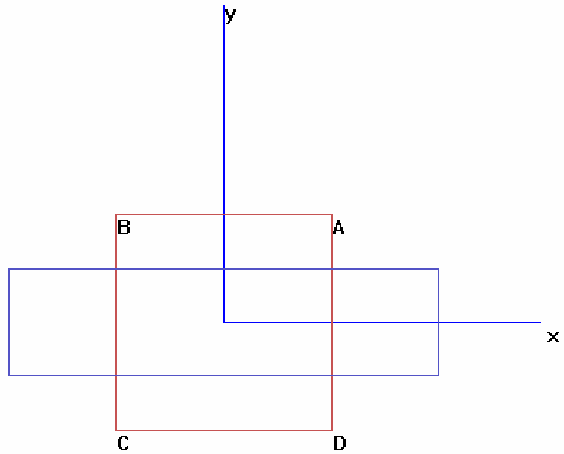
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \qquad (k = 2)$$





$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = hy \end{cases} \qquad (k = 2, h = 1/2)$$

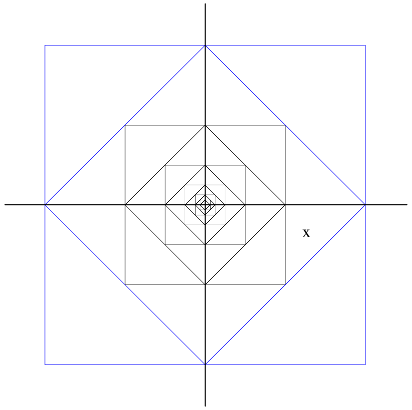


ROTO-OMOTETIA ($b_x=b_y=0$)

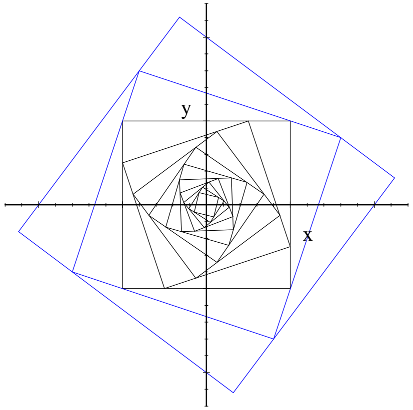
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

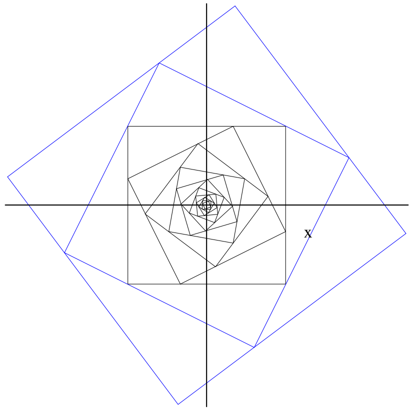
$$\begin{cases} x' = (k\cos\vartheta)x - (k\sin\vartheta)y \\ y' = (k\sin\vartheta)x + (k\cos\vartheta)y \end{cases} \qquad (k = \sqrt{2}/2, \vartheta = \pi/4)$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$



ROTO-OMOTETIA ($b_x=b_y=0$)





$$k = \sqrt{10}/4, \quad \vartheta = artg\ (1/3)$$

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$k = \sqrt{5}/3, \quad \vartheta = artg\ (1/2)$$

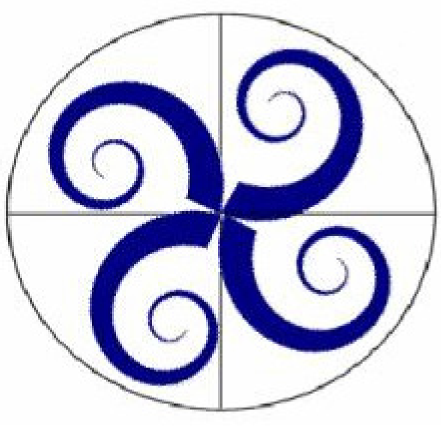
$$\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

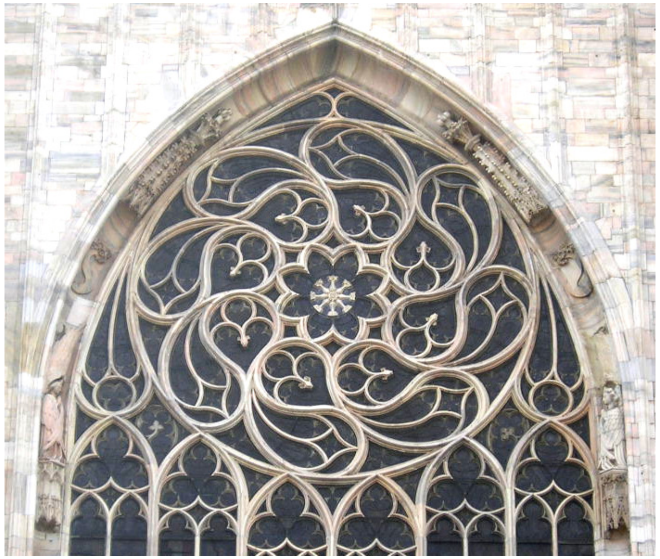
ROSONI

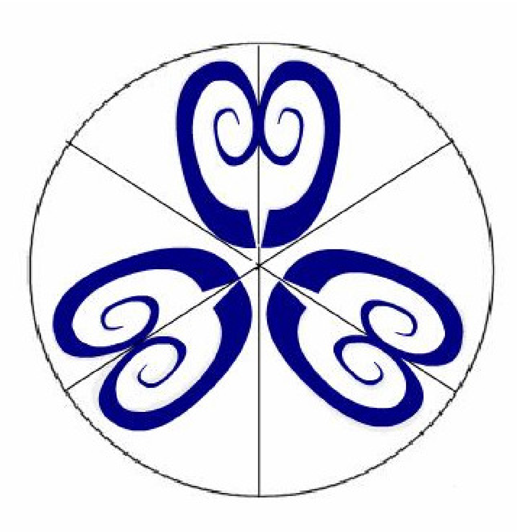
I ROSONI

•decorazioni circolari generate da rotazioni di un motivo attorno al centro

•motivo senza o con assi di simmetria

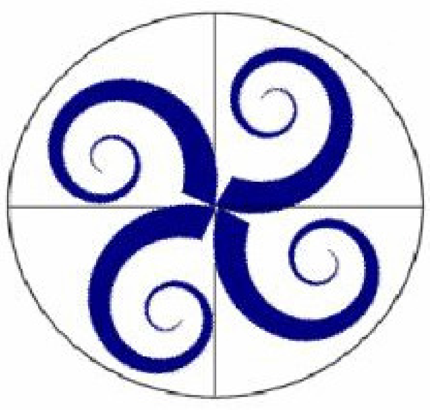




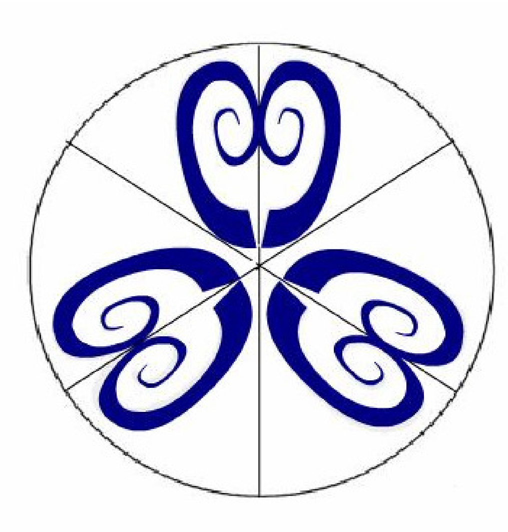


STRUTTURA DI UN ROSONE

• **ciclico :** senza assi di simmetria, generato da rotazioni di un motivo base



• **diedrale :** con uno o più assi di simmetria, generato sia da rotazioni sia da riflessioni di un motivo base



I ROSONI CICLICI

Rosone ciclico C_n

• il motivo base ruota attorno al centro con rotazioni di ampiezza

$$\vartheta = 2\pi/n$$

• l'intero rosone si ottiene con *n-1* rotazioni

•la matrice di rotazione è:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi/n & -\sin 2\pi/n \\ \sin 2\pi/n & \cos 2\pi/n \end{bmatrix}$$

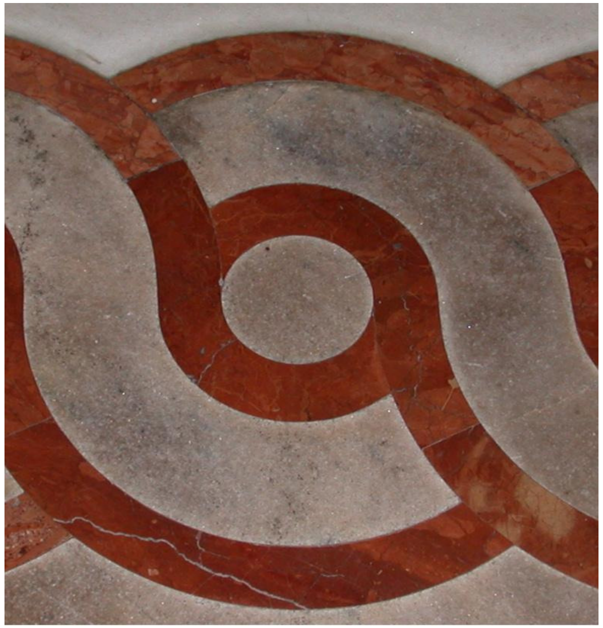
$$n = 10$$

ROSONI CICLICI NEL DUOMO DI MILANO

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \vartheta = \pi$$

$\mathbf{C}_4$



$\mathbf{C}_2$

I ROSONI DIEDRALI

Rosone diedrale D_n

• rosone ciclico con *n* assi di simmetria

• il motivo base, generato per riflessione rispetto ad un asse, ruota attorno al centro

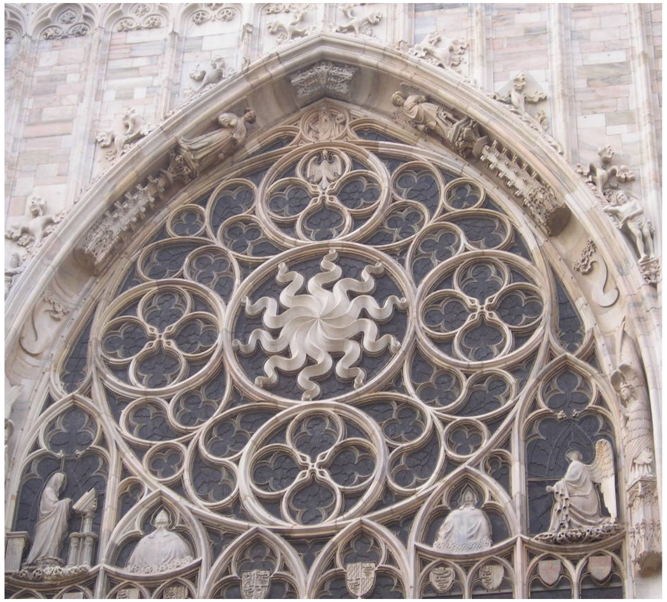
• il motivo base genera il rosone con *2n-1* riflessioni rispetto agli assi

•la matrice di trasformazione è:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos 2(\alpha + k\pi/n) & \sin 2(\alpha + k\pi/n) \\ \sin 2(\alpha + k\pi/n) & -\cos 2(\alpha + k\pi/n) \end{bmatrix},$$

$$k = 0, 1, \ldots, 2n-2$$

(α= angolo formato dal primo asse di riflessione con il semiasse positivo delle ascisse)



$$n = 4$$

ROSONI DIEDRALI NEL DUOMO DI MILANO

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos 2(\pi/2 + k\,\pi/3) & \sin 2(\pi/2 + k\,\pi/3) \\ \sin 2(\pi/2 + k\,\pi/3) & -\cos 2(\pi/2 + k\,\pi/3) \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \pi/2, \quad k = 0,1,\dots,4$$

$\mathbf{D_3}$

$\mathbf{D_8}$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos 2(\pi/8 + k\,\pi/8) & \sin 2(\pi/8 + k\,\pi/8) \\ \sin 2(\pi/8 + k\,\pi/8) & -\cos 2(\pi/8 + k\,\pi/8) \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8}, \quad k = 0,1,\dots,14$$

ROSONI DIEDRALI

ROSONI CICLICI

Franca Caliò – Elena Marchetti

franca.calio@polimi.it

elena.marchetti@polimi.it

lab-fds@mate.polimi.it

http://fds.mate.polimi.it/