POLITECNICO MILANO 1863

effediesse = f(s)
Laboratorio di Formazione Matematica e di Sperimentazione Scientifica

Calcolare π lanciando coriandoli

Piercesare Secchi
MOX – Dipartimento di Matematica

3.14.18

Un esperimento matematico

Un esperimento matematico

Raggio del cerchio:	1
Area del Cerchio:	π
Lato del quadrato circoscritto:	2
Area del quadrato circoscritto:	4
Rapporto Area Cerchio / Area quadrato:	$\frac{\pi}{4}$
Coriandoli lanciati:	n

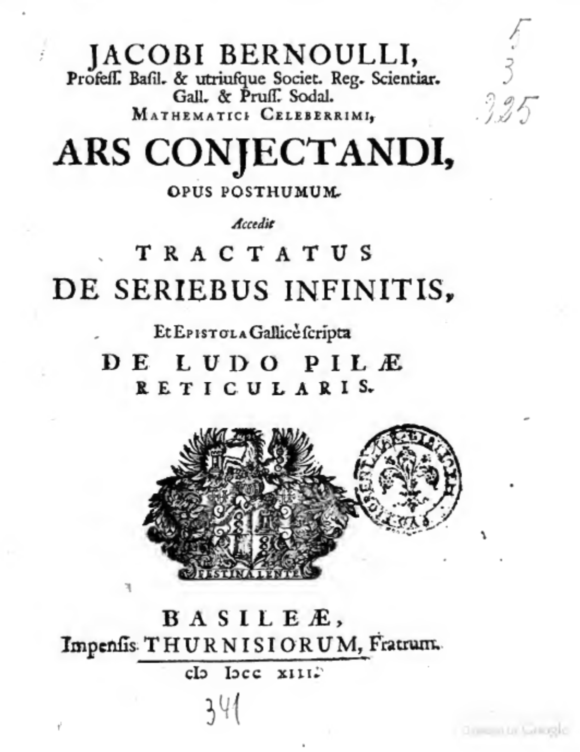
Stimatore di π: $p(n) = 4 \cdot \frac{\#\text{Coriandoli caduti nel cerchio}}{n}$

Legge dei Grandi Numeri

Per ogni $\epsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} Pr[\ |p(n) - \pi| < \epsilon] = 1$

Il *Theorema Aureum*: la legge dei grandi numeri

Jacob Bernoulli (1654 -1705)



F
3
325

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
clɔ Iɔcc xiii.

341

1713

Lettera di Jacob Bernoulli a Leibniz, 20 Aprile 1704

“Di nascosto pongo in un’urna diverse biglie, alcune bianche e altre nere, e il numero delle bianche sia il doppio di quelle nere; poiché questo rapporto è a te ignoto, vorrai determinarlo con un esperimento secondo il quale estrarrai ripetutamente biglie dall’urna (con restituzione) e ne annoterai il colore (…) Io affermo che sarai moralmente certo che il rapporto tra il numero di biglie estratte di colore bianco e quelle nere diventerà vicino quanto vuoi al vero rapporto di due a uno.

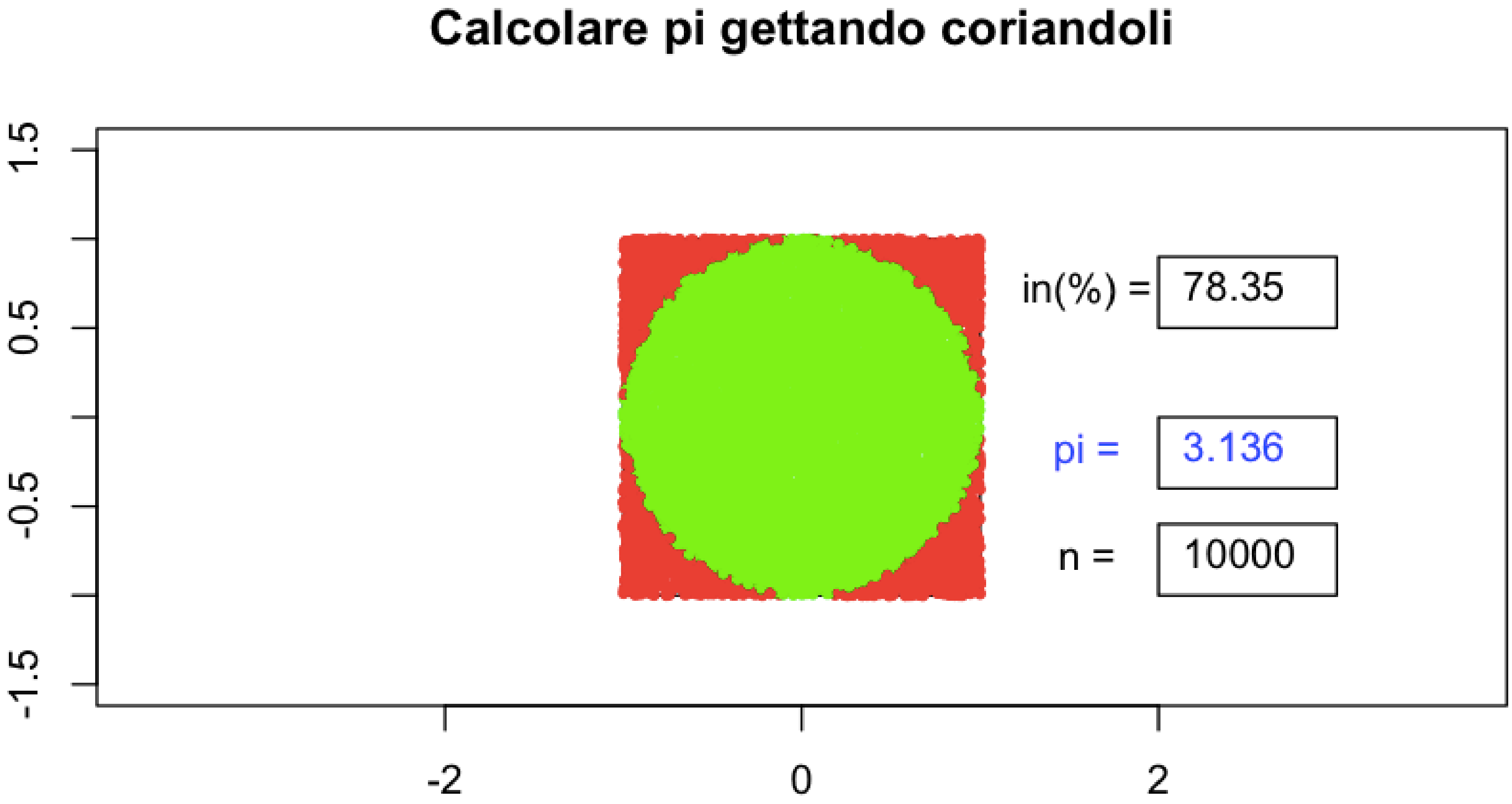
Se ora si sostituisce all’urna il corpo umano, giovane o vecchio che sia, che contiene i germi delle malattie allo stesso modo in cui l’urna contiene le biglie si può analogamente determinare quanto più vicino alla morte sia il vecchio del giovane”

Ars Conjectandi, 1713

millies, ſi capiantur 36966, &c. & ſic porrò in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis. Unde tandem hoc ſingulare ſequi videtur, quòd ſi eventuum omnium obſervationes per totam æternitatem continuarentur, (probabilitate ultimo in perfectam certitudinem abeunte) omnia in mundo certis rationibus & conſtanti viciſſitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut etiam in maximè caſualibus atque fortuitis quandam quaſi neceſſitatem, &, ut ſic dicam, fatalitatem agnoſcere teneamur; quam neſcio annon ipſe jam Plato intendere voluerit, ſuo de univerſali rerum apocataſtaſi dogmate, ſecundum quod omnia poſt innumerabilium ſeculorum decurſum in priſtinum reverſura ſtatum prædixit.

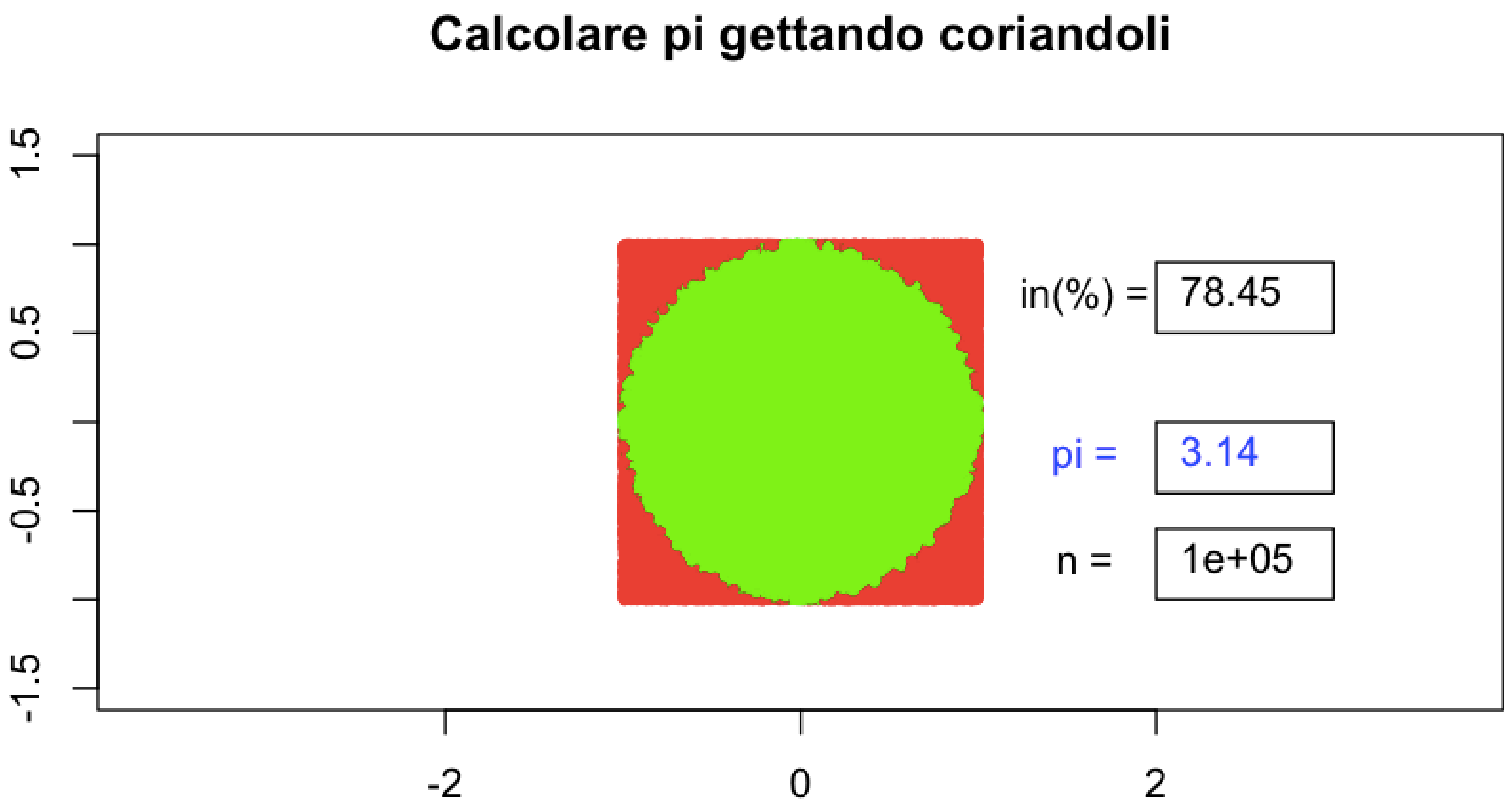
“Dal che si deduce questo singolare corollario: se le osservazioni di tutti gli eventi continuassero per l’eternità, (con la probabilità che alla fine diventa perfetta certezza), si scoprirà che ogni cosa al mondo è governata da precisi rapporti e da una legge costante del cambiamento; sicchè anche per gli accadimenti massimamente casuali e fortuiti siamo costretti a riconoscere una qualche forma di necessità e, direi quasi, di fato. Non so se lo stesso Platone volesse intendere questo, con la sua dottrina dell’apocastasi universale, in base alla quale predisse che ogni cosa dopo innumerovoli secoli sarebbe ritornata al suo stato originario.”

n = 10000

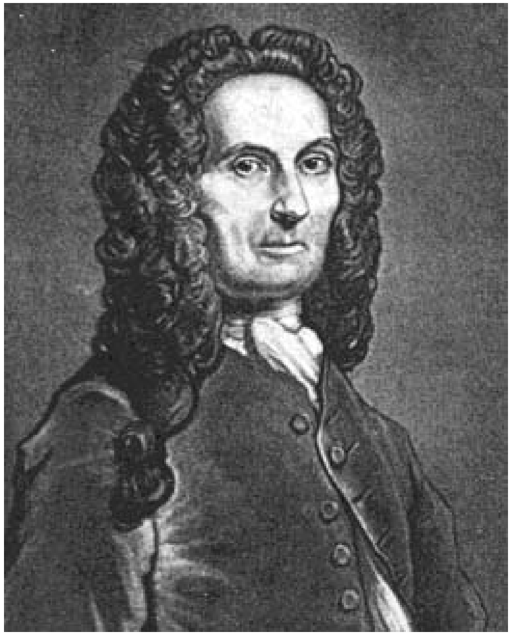


Calcolare pi gettando coriandoli
1.5
0.5
-0.5
-1.5
-2
0
2
in(%) =
78.35
pi =
3.136
n =
10000

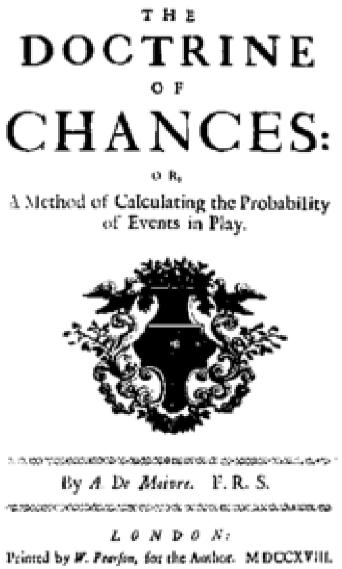
n=100000


Calcolare pi gettando coriandoli
in(%) =
78.45
pi =
3.14
n =
1e+05
1.5
0.5
-0.5
-1.5
-2
0
2

Quantificare l’errore di stima



Abraham De Moivre (1667 –1754)



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A Method of Calculating the Probability of Events in Play.

By A. De Moivre. F. R. S.

LONDON:
Printed by W. Pearson, for the Author. MDCCXVIII.

1738

Teorema Centrale del Limite

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left[\ |p(n)-\pi|\ < 4z\frac{\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z}\exp(-\frac{1}{2}t^2)dt$$

Quantificare l'errore di stima

Come conseguenza del TCL otteniamo che, per n grande,

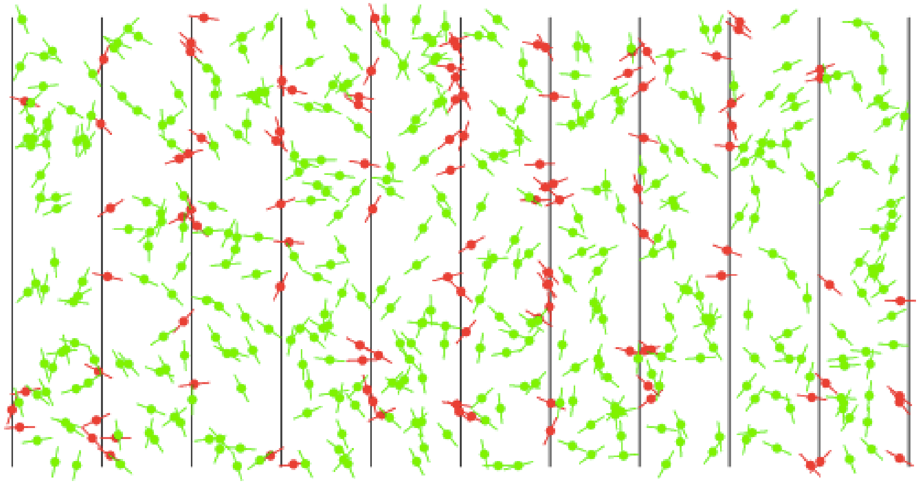
$$Pr[\ |p(n) - \pi| \ < \frac{4}{\sqrt{n}}] \geq 0.95$$

I risultati dell'esperimento:

n	$4/\sqrt{n}$	$p(n)$	(Errore Vero)
$16 \cdot 100$	0.1	3.15	-0.008407
$16 \cdot 10000$	0.01	3.14605	-0.004457
$16 \cdot 10^6$	0.001	3.140614	0.000978
10^8	0.0004	3.141607	-1.454641e-05
$16 \cdot 10^8$	0.0001		

L'ago di Buffon

Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon
1707-1788



Distanza tra le righe: d
Lunghezza dell'ago: a

$$Pr[\text{Ago intersechi una riga}] = \frac{2a}{\pi d}$$

Calcolare integrali gettando coriandoli: il metodo Monte Carlo

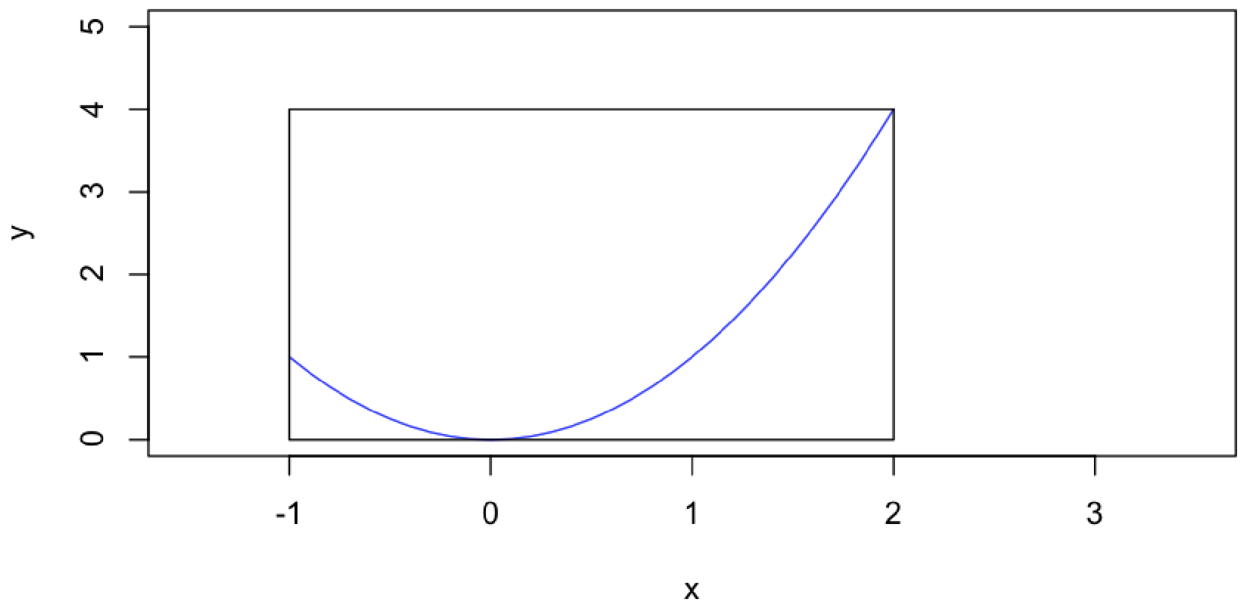
Consideriamo la parabola $y = x^2$

Area sottesa dalla parabola nell'intervallo [-1, 2]: α (incognita)

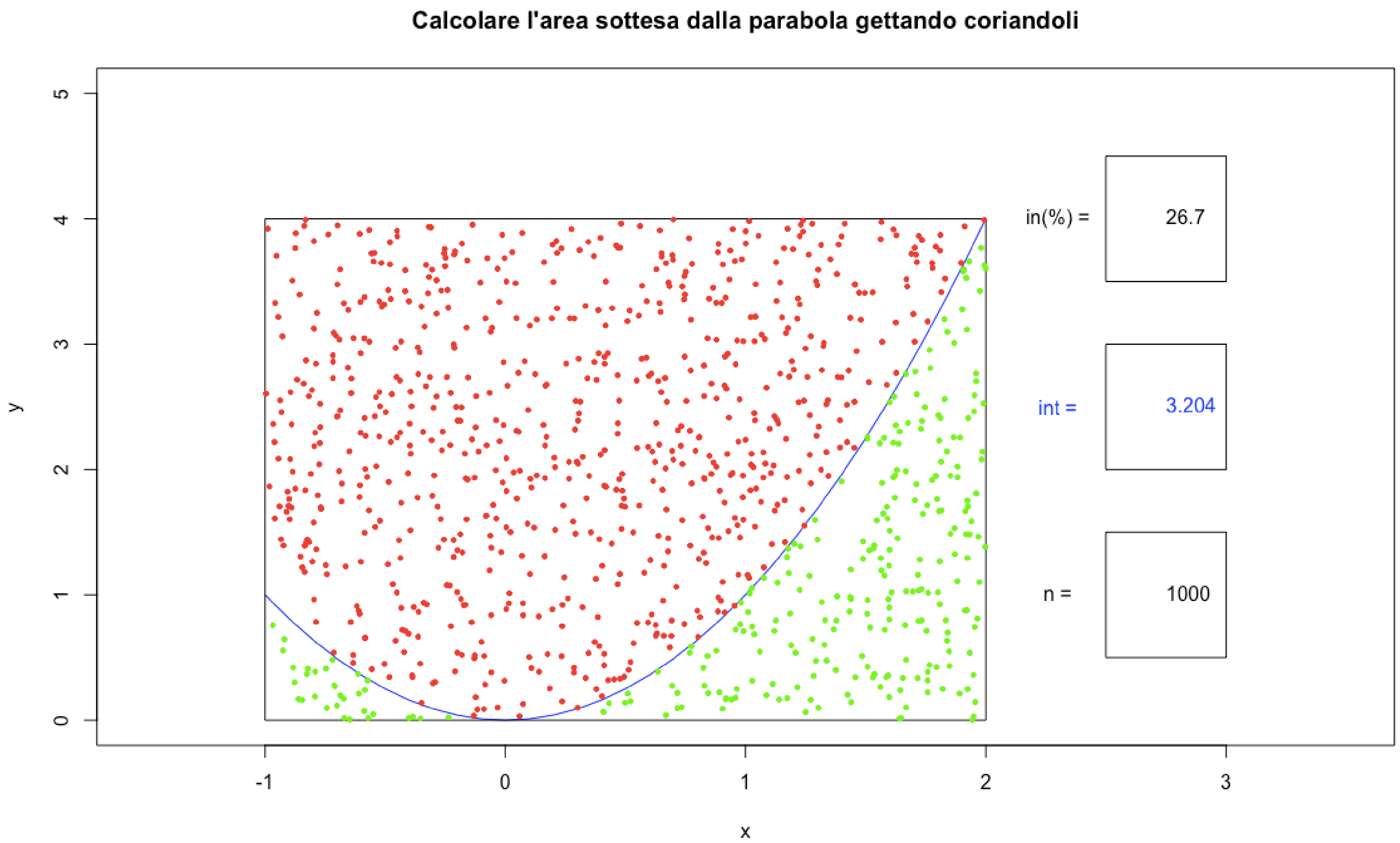
Area del Rettangolo: $3 \cdot 4 = 12$

Coriandoli lanciati: **n**

Stimatore di α: $a(n) = 12 \cdot \dfrac{\#\text{Coriandoli caduti sotto la parabola}}{n}$



n=1000


Calcolare l'area sottesa dalla parabola gettando coriandoli
in(%) =
26.7
int =
3.204
n =
1000
x
y
-1
0
1
2
3
4
5

Calcolare integrali gettando coriandoli

In questo caso sappiamo calcolare analiticamente l'integrale:

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \mid_{-1}^{2} = 3$$

Per n grande (TCL):

$$Pr[\ |a(n) - \alpha| \ < \frac{12}{\sqrt{n}}] \geq 0.95$$

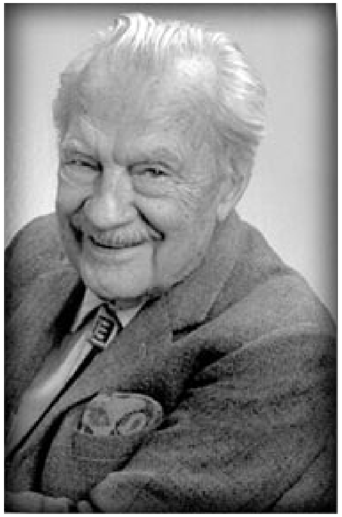
n	$12/\sqrt{n}$	$a(n)$	(Errore Vero)
$144 \cdot 100$	0.1	3.036667	-0.036667
$144 \cdot 10000$	0.01	2.9955	0.0045
$144 \cdot 10^6$	0.001	2.999818	0.000182

Monte Carlo?

Enrico Fermi
1901-1954

Stanislaw Ulam
1909-1984

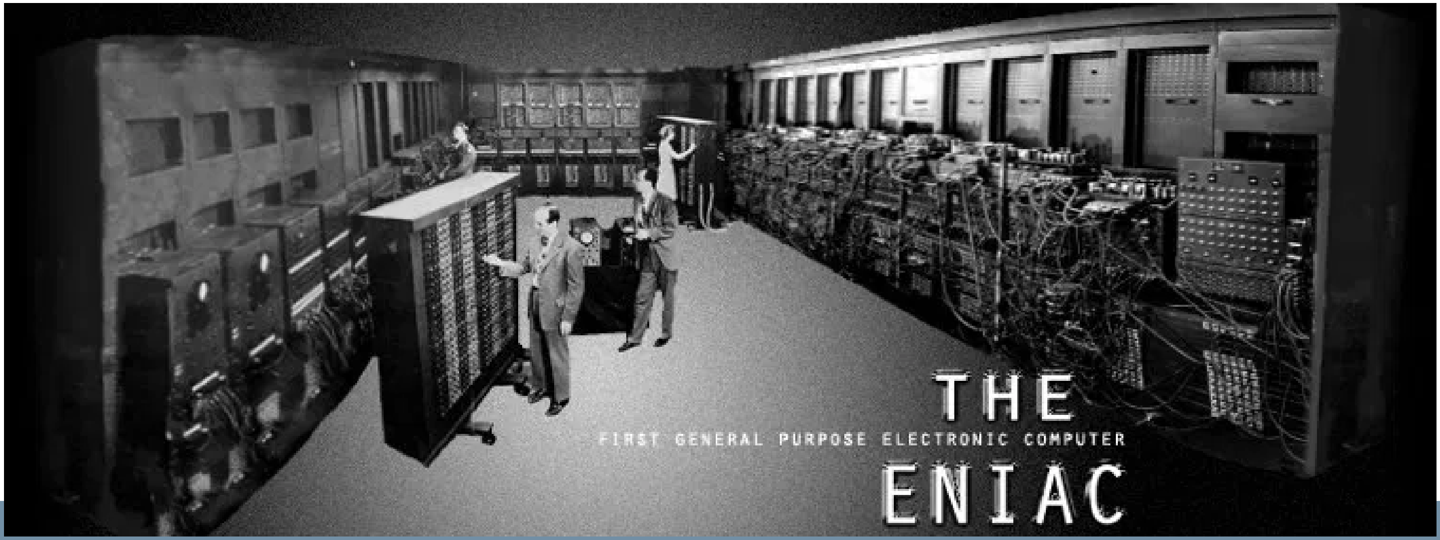
John von Neumann
1903-1957



N. C. Metropolis
1915-1999

Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
EST. 1943

University of
Pennsylvania
1948



Un esempio più difficile

Si calcoli:

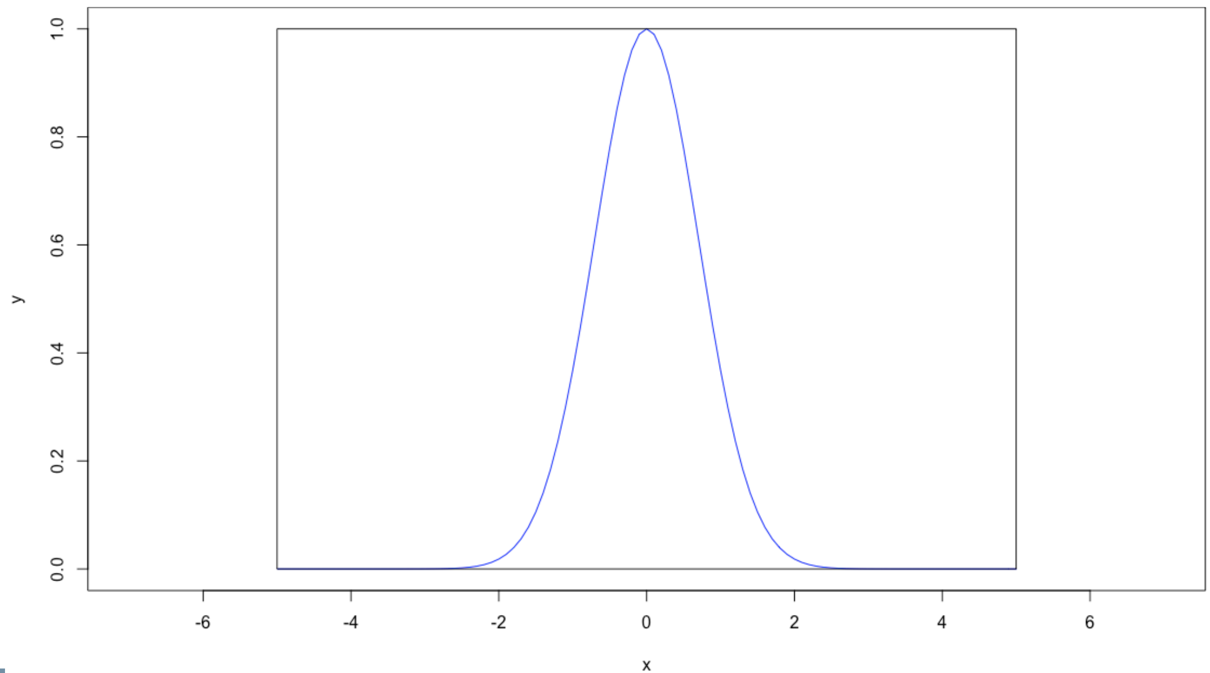
$$\alpha^2 = \left(\int_{-5}^{5} e^{-x^2} dx\right)^2$$

Area sottesa dalla curva $y = e^{-x^2}$ **nell'intervallo [-5, 5]:** α **(incognita)**

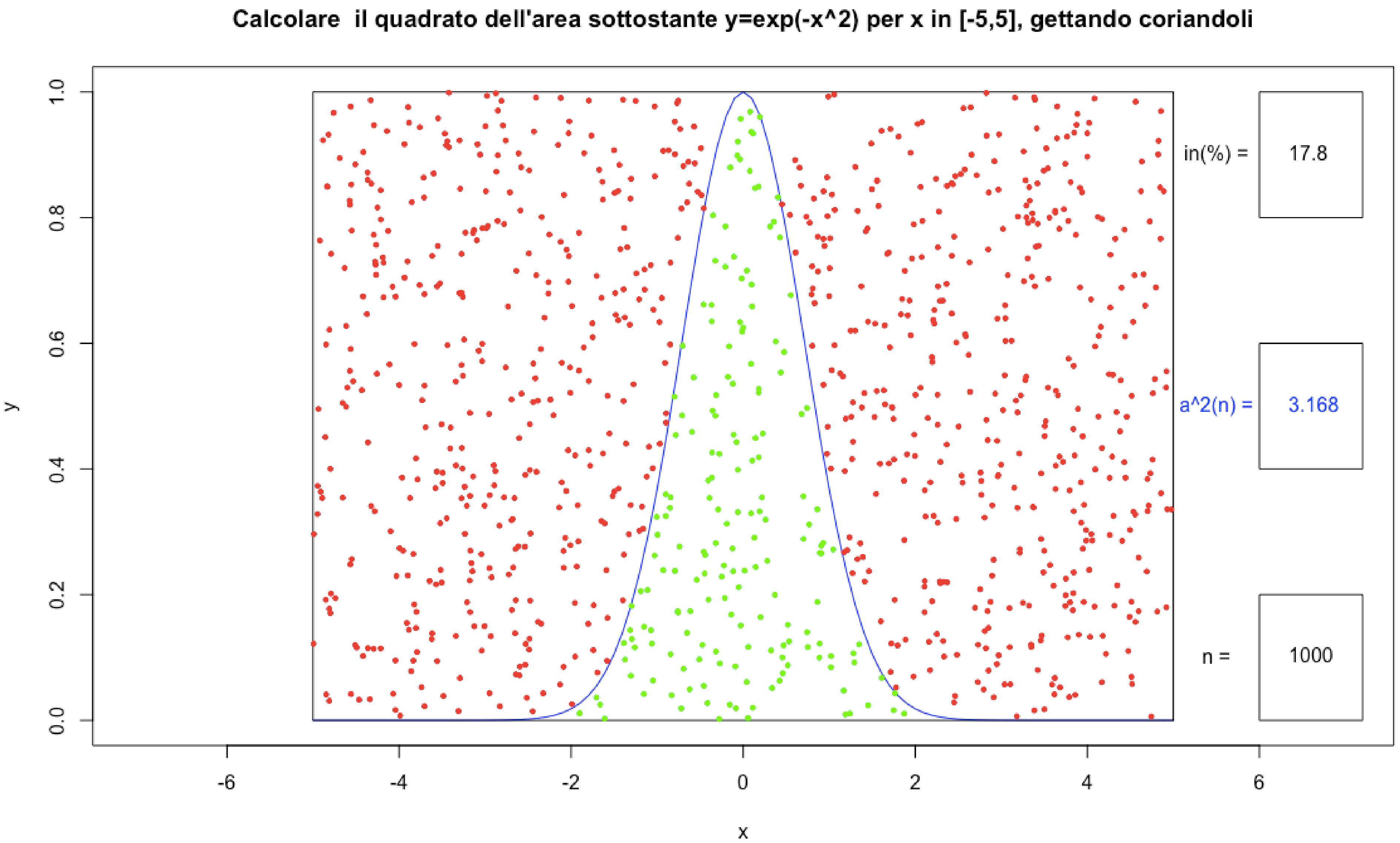
Area del Rettangolo: $10 \cdot 1 = 10$

Coriandoli lanciati: **n**

Stimatore di α^2**:** $a^2(n) = \left(10 \cdot \frac{\#\text{Coriandoli caduti sotto la curva}}{n}\right)^2$



n=1000



Calcolare il quadrato dell'area sottostante y=exp(-x^2) per x in [-5,5], gettando coriandoli
in(%) =
17.8
a^2(n) =
3.168
n =
1000
y
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-6
-4
-2
0
2
4
6
x

Calcolare integrali gettando coriandoli

Per n grande (TLC + Metodo Delta):

$$Pr[\ |a^2(n) - \alpha^2| \ < \frac{128}{\sqrt{n}}] \geq 0.95$$

n	$128/\sqrt{n}$	$a^2(n)$
$128^2 \cdot 100$	**0.1**	**3.137227**
$128^2 \cdot 10000$	**0.01**	**3.139891**

Osservazioni sulla precisione del Metodo Monte Carlo

- Gli esempi sviluppano un Metodo Monte Carlo molto semplice, ma non ottimo: hit-or-miss.
- La precisione del metodo è quantificata da un termine del tipo:

$$\frac{c}{\sqrt{n}}$$

- Raffinando il metodo di simulazione possiamo controllare la costante **c** in modo da aumentare la precisione, ma non possiamo controllare il denominatore $\sqrt{n}$
- Per integrali 1D, metodi numerici non-stocastici raggiungono precisioni molto maggiori, al costo di una maggiore “complicazione” dell’algoritmo;
- L’attrattiva dei Metodi Monte Carlo è che essi - senza modifiche formali - possono essere utilizzati per calcolare integrali 2D, 3D, …

Ma quanto vale $\alpha^2 = (\int_{-5}^{5} e^{-x^2} dx)^2$?

$$\boxed{(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)^2 = \pi}$$

3. 14. 18