TRIGONOMETRIA DI BASE

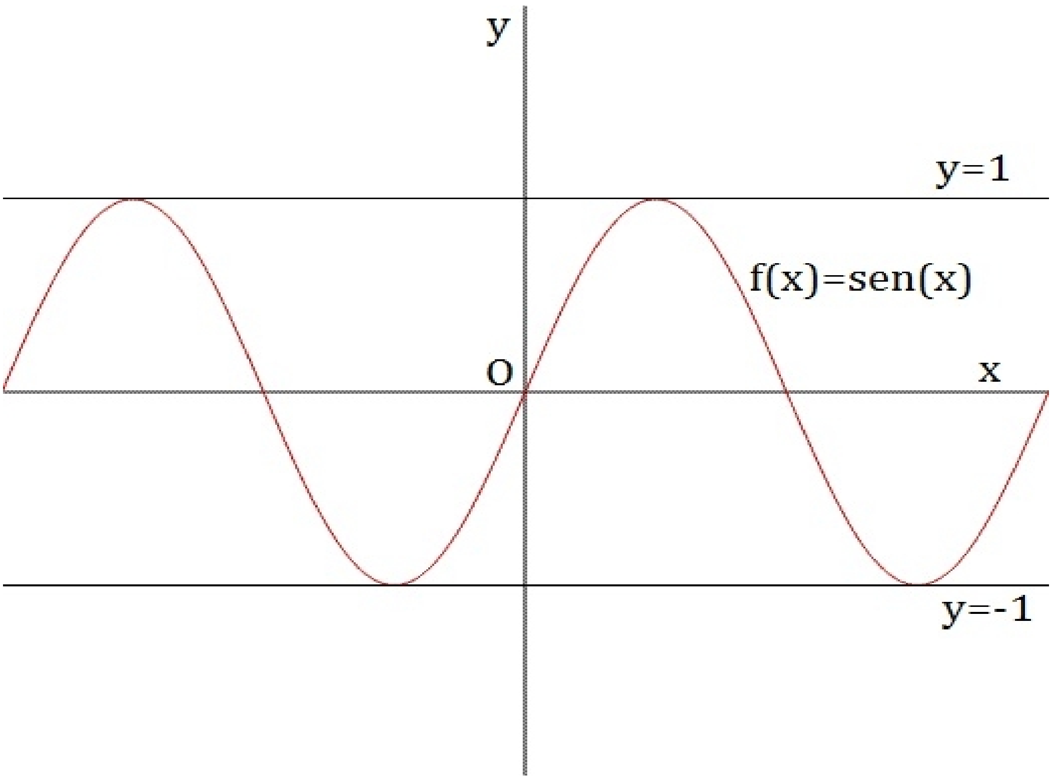
Classi 2° H e 2° I
Scuola Media di Postioma (TV)
Anno scolastico 2013 - 2014

"Comunicare con le Stelle"
dalle origini della Radio al futuro

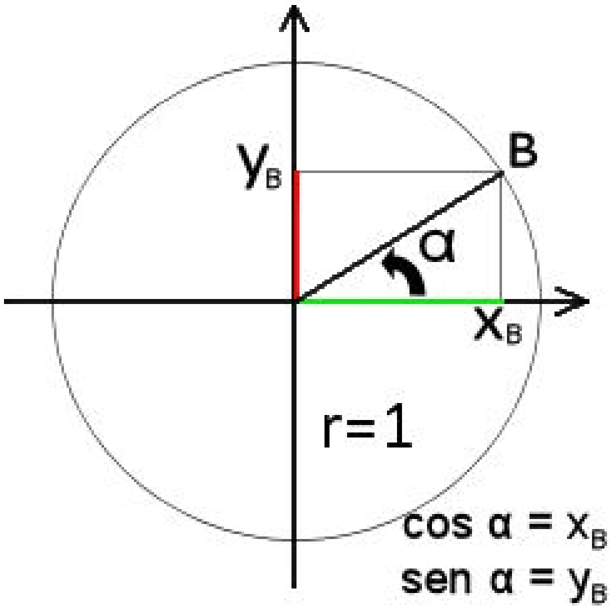
INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

Carlotta Zamai classe 2°I Francescato Daniele classe 2°H

Ogni fenomeno che produce una oscillazione viene definito fenomeno ondulatorio.
Una molla, un elastico, una corda tesa, una lama di acciaio armonico, la corda di una chitarra, la corda di un pianoforte... , se vengono sollecitate, entrano in vibrazione e trasmettono il movimento alle particelle d'aria circostanti.
Le particelle d'aria, trasmettono il movimento alle particelle, via via più lontane, fino a interessare quelle a diretto contatto con il nostro timpano.
Se l'energia trasmessa è sufficientemente elevata, il timpano inizia a vibrare, e trasmette questa vibrazione agli ossicini dell'orecchio interno che la trasportano fino al nervo acustico, che la traduce in impulso elettrico, che il cervello elabora e ci restituisce come suono.
Quando ascoltiamo un brano musicale, noi percepiamo sia il volume, sia le note.
Il volume e le note sono i 2 principali parametri delle onde sonore.
La rappresentazione grafica di un'onda è data da una sinusoide, che è una particolare linea curva che possiamo rappresentare sul piano cartesiano.



Per comprendere meglio i vari parametri di un'oscillazione,ci immaginiamo una ruota da bicicletta trasparente,posizionata sulla cattedra e libera di ruotare.
Immaginiamo di osservare questa ruota frontalmente,e in un punto preciso,posizioniamo una lucina.
Se osserviamo il movimento della ruota e interponiamo tra noi e lei uno schermo trasparente ma opaco,ci accorgiamo che il movimento della lucina è una oscillazione verticale ed orizzontale regolare.
(vedi animazione 01)



Consideriamo il raggio della nostra rotazione lungo 1 unità.

r = 1u

Costruiamo la tabella dei valori estremi di ogni fase.

FASE	ANGOLO	ALTEZZA
0	**0°**	**0**
1	**90°**	**+1u**
2	**180°**	**0**
3	**270°**	**-1u**
4	**360°**	**0**

Se analizziamo simultaneamente il movimento della lampadina,sia frontalmente,sia lateralmente,possiamo individuare 4 fasi:

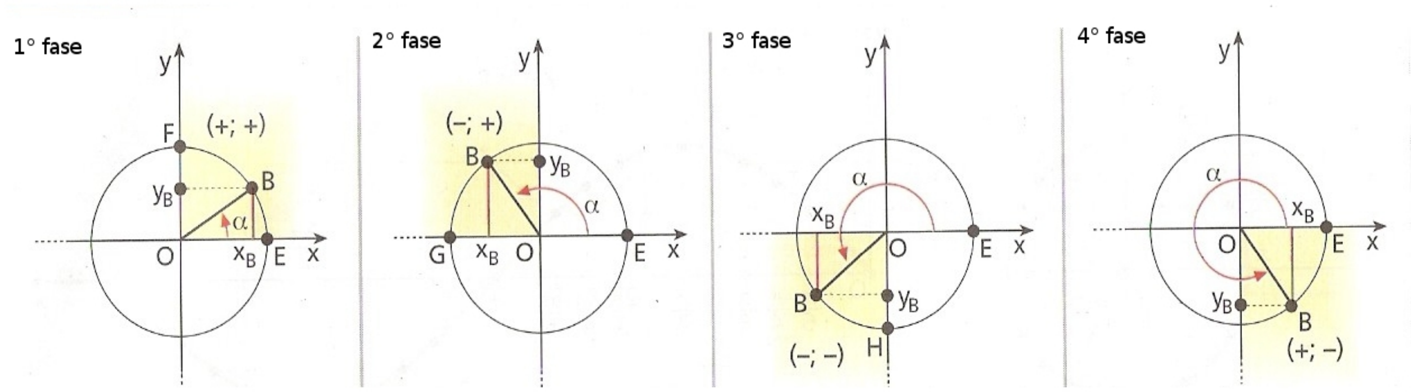
1° fase:rotazione da 0 a 90°
se si osserva frontalmente la lampadina la si vede salire fino al raggiungimento del punto più alto.

2° fase:rotazione da 90 a 180°
se si osserva frontalmente la lampadina la si vede scendere fino al raggiungimento del punto di partenza.

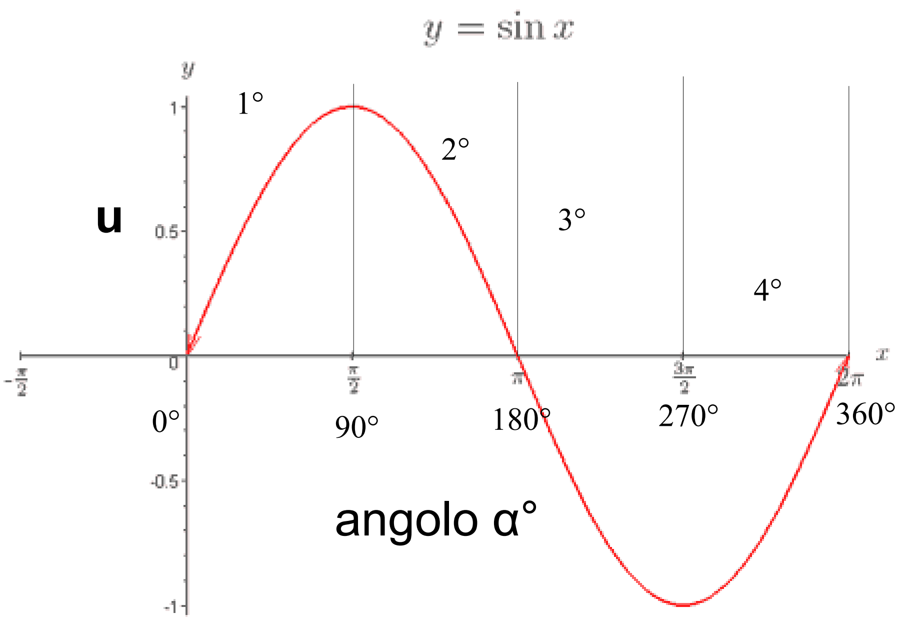
3° fase:rotazione da 180 a 270°
se si osserva frontalmente la lampadina la si vede scendere fino al raggiungimento del punto più basso.

4° fase:rotazione da 270 a 360°
se si osserva frontalmente la lampadina la si vede salire fino al raggiungimento del punto di partenza.

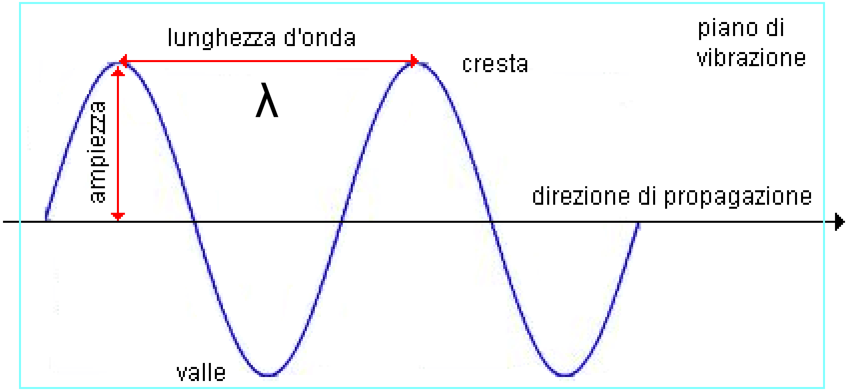
Queste 4 fasi rappresentano un ciclo completo di una oscillazione.
Se mantenessimo in rotazione la nostra ruota,si vedrebbe il nostro punto luminoso oscillare continuamente tra il punto di massimo e quello di minimo.
Nella nostra visione frontale possiamo indicare le varie fasi



(vedi animazione 02)



Capito come funziona un movimento ciclico proviamo ora a rappresentarlo su un diagramma cartesiano in cui, sull'asse della x rappresentiamo l'angolo di rotazione **α°**, mentre sull'asse della y rappresentiamo le altezze raggiunte in frazione di unità **u**



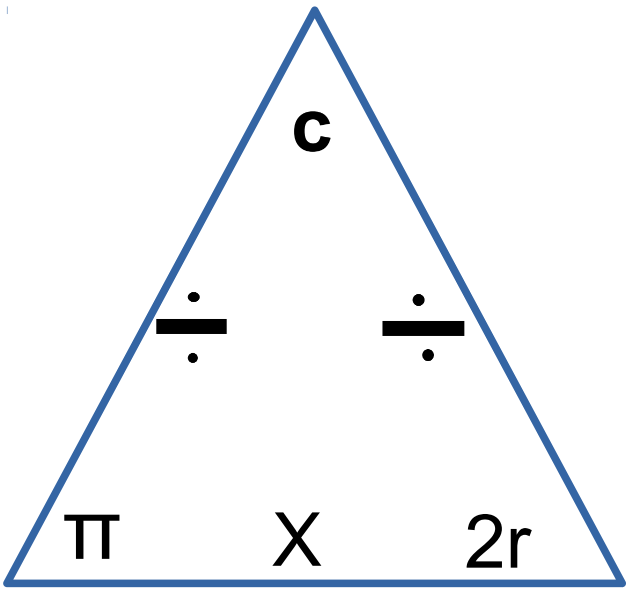
Dal disegno possiamo ricavare i parametri fondamentali della nostra onda, che sono l'altezza (definita ampiezza che corrisponde alla distanza tra il massimo, o il minimo e l'asse X) e la lunghezza d'onda **λ** (distanza dal punto di inizio del ciclo, 0°, e il punto finale del ciclo 360° o distanza tra due massimi o due minimi).
Per collegare la lunghezza d'onda **λ** agli angoli espressi in gradi, consideriamo un nuovo modo di rappresentare gli angoli.
Per considerare questa nuova rappresentazione dobbiamo riprendere il concetto di circonferenza.
La formula che ci permette di calcolare la lunghezza della circonferenza è:

$$c= 2*\pi*r$$

che si può anche scrivere

$$c= 2r* \pi$$

dove **π** è un numero fisso che rappresenta il quoziente tra la circonferenza e **2r** rappresenta il diametro.
Anche in questo caso possiamo ricorrere al nostro amico, il famoso “occhio di Dio”



Qualunque sia la misura della circonferenza, il suo rapporto con il diametro sarà sempre π

Se vogliamo misurare una semicirconferenza basterà dividere per 2 la misura della circonferenza.

$$c: 2 = (2*r*\pi) : 2 = \pi*r$$

Se vogliamo calcolare ¼ di circonferenza, basterà dividere per 4 la circonferenza

$$c : 4 = 2 * r * \pi : 4 = \pi*r : 2 = \frac{1}{2}\pi*r$$

Se vogliamo calcolare ¾ di una circonferenza basterà moltiplicare per ¾ la misura della circonferenza

$$\frac{3}{4} c = \frac{3}{4} 2* r * \pi = 3/2\pi * r$$

Moltiplicando il raggio per π/2 otteniamo ¼ di circonferenza, per π otteniamo metà circonferenza, per 3/2π otteniamo ¾ di circonferenza e per 2π l'intera circonferenza.

π/2 corrisponderà ad un angolo di **90°**

π corrisponderà ad un angolo di **180°**

3/2π corrisponderà ad un angolo di **270°**

2π corrisponde ad un angolo di **360°**

Abbiamo visto come un'oscillazione sia stata associata ad un movimento circolare in cui la velocità con cui viene coperto un angolo è costante.
Introduciamo il concetto di propagazione e di velocità di propagazione.

(vedi animazione 03)

(vedi animazione 04)

(vedi animazione 05)

La **velocità di propagazione** è data dal rapporto tra la distanza che intercorre dal punto di partenza al punto di arrivo di un segnale diviso il tempo impiegato a percorrerlo.
Per le onde elettromagnetiche (luce, radio frequenze, raggi x e raggi γ …) si assume come velocità di propagazione nel vuoto il valore di 300000 km/s.
Per le onde sonore assumiamo come velocità di propagazione del suono nell'aria il valore di 300 m/s.
Questo ci fa capire come le onde elettromagnetiche (luce) siano più veloci delle onde sonore (per questa ragione prima si vede il lampo e poi si sente il tuono).
Come unità di misura delle distanze astronomiche viene utilizzato il concetto di velocità della luce.
Le distanze astronomiche infatti, vengono misurate in anni luce.
Un anno luce corrisponde alla distanza che in un anno percorre un'onda elettromagnetica.
Tale valore lo si ricava moltiplicando 300000 km per il numero di secondi presenti in un anno.
Il calcolo di secondi lo si esegue nel seguente modo

secondi in un anno = secondi in un ora*24*365 = 3600*24*365 = 31.536.000 secondi

anno luce = secondi anno * 300.000km/secondi = 9.460.800.000.000 km

Che sono quasi 9.500 miliardi di chilometri!

Abbiamo visto così come la velocità di propagazione di un'onda possa essere utilizzata per calcolare anche le distanze astronomiche.
Vediamo ora un altro parametro legato alle onde, che nelle onde sonore determina la nota, mentre nelle onde luminose determina il colore.
Tale parametro prende il nome di frequenza.

Frequenza

Si definisce frequenza di un'oscillazione, il numero di cicli che questa oscillazione compie in un secondo

In pratica la frequenza è data da un numero diviso un secondo e pertanto possiamo dire che la sua unità di misura sono i **secondi**$^{-1}$.
Infatti

n° cicli = n°puro

s = 1 secondo

f = frequenza

f = n° cicli / s =n° cicli·* s^{-1}

Come si può notare, l'unità di misura della frequenza è data **secondi**$^{-1}$.

Ricapitolando

Abbiamo tutte le informazioni per poter legare tra loro velocità, lunghezza d'onda e frequenza.
La lunghezza d'onda e la frequenza sono direttamente collegate l'una all'altra, tanto che, conoscendo una delle due e la velocità di propagazione, possiamo sempre determinare l'altra.
Si avranno così le seguenti formule

v = velocità

f = frequenza

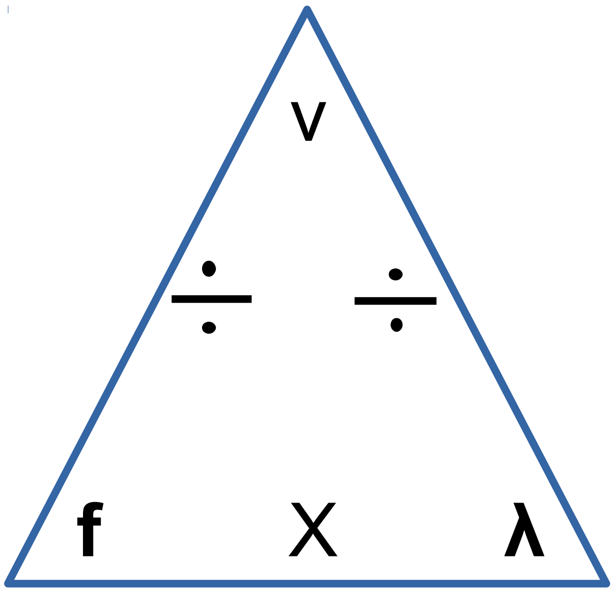
λ = lunghezza d'onda

λ = v / f

f = v / λ

v = f·* λ

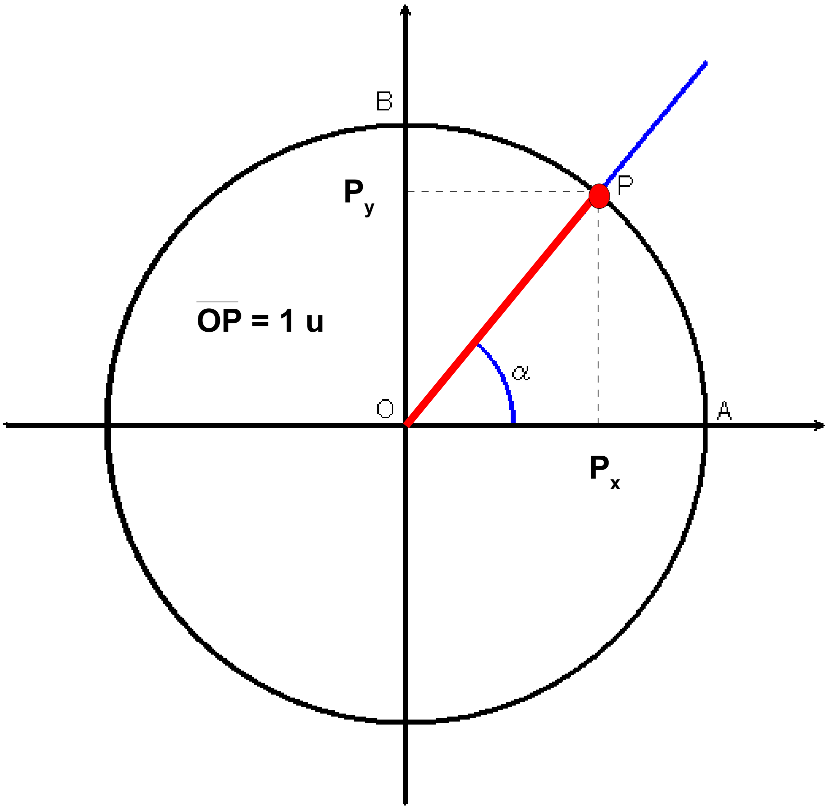
Anche in questo caso, ci viene in aiuto "l'occhio di Dio"



Concetti base di trigonometria

LA CIRCONFERENZA TRIGONOMETRICA : SENO E COSENO DI UN ANGOLO

Il punto di partenza della trigonometria è la circonferenza trigonometrica.
La caratteristica di questa circonferenza è che il centro posizionato sull'origine degli assi cartesiani e il suo raggio è di 1u.



Si definisce circonferenza trigonometrica una circonferenza di raggio unitario avente il centro posizionato sull'origine degli assi.

Consideriamo nuovamente la ruota di bicicletta trasparente e con la lucina che avevamo posizionato sulla cattedra.
Osserviamola lateralmente e immaginiamo di disegnare in rosso il raggio, che unisce la lucina al centro della circonferenza.
Questa volta consideriamo le coordinate **Py** della nostra lucina
Consideriamo ancora le 4 fasi della rotazione che avevamo visto in precedenza.

1° fase = angolo α da 0 a π/2

In questa fase, **Py** varia in modo continuo da 0 a 1

2° fase = angolo α da π/2 a π

In questa fase, **Py** varia in modo continuo da 1 a 0

3° fase = angolo α da π a 3/2 π

In questa fase, **Py** varia in modo continuo da 0 a -1

4° fase = angolo α da 3/2π a 2π

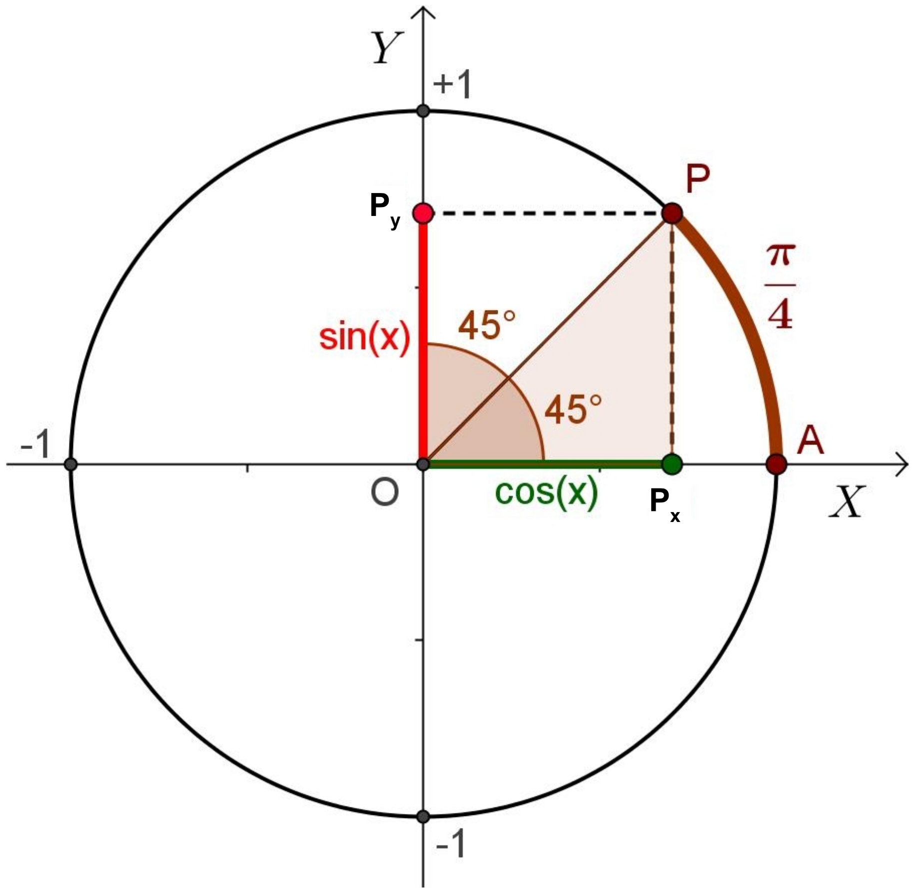
In questa fase, **Py** varia in modo continuo da -1 a 0

Se analizziamo complessivamente le 4 fasi, ci accorgiamo che la coordinata Y del punto P varia in modo continuo da un massimo (1) a un minimo (-1) in funzione dell’angolo di

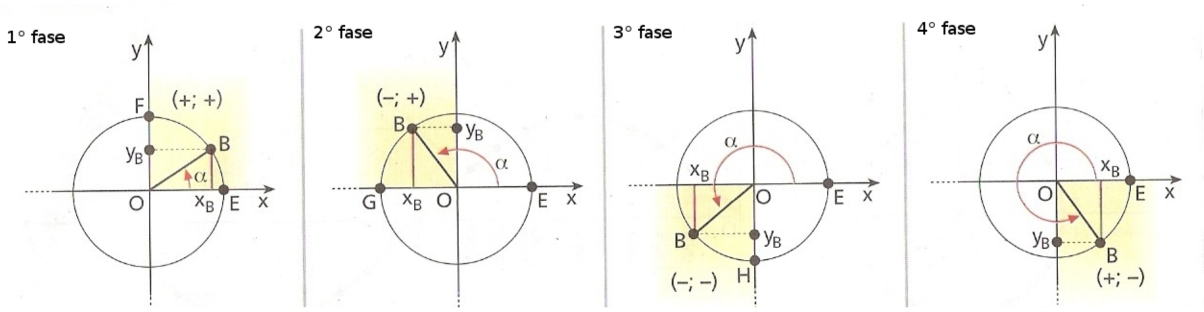
rotazione.**α**
Osservando il movimento di **Py** durante la rotazione di P ci accorgiamo che questo, altro non è che l' oscillazione che avevamo considerato in precedenza per la nostra lucina.
La coordinata **Py**, in trigonometria prende il nome di seno dell'angolo **α**, e si indica **sen α**.

Si definisce seno di α la coordinata Py di un punto generico P della circonferenza trigonometrica.

L'angolo che il raggio che passa per **P**, forma con l'asse delle **X** (angolo antiorario) è l' angolo **α** di cui si è considerato il seno



Consideriamo ora la coordinata **Px** del nostro punto.
Possiamo notare che essa varia in modo diverso rispetto alla coordinata **Py.**
Analizziamo ora le 4 fasi viste in precedenza, ma questa volta prendiamo in considerazione la coordinata **Px.**



1° fase = angolo α da 0 a π/2

In questa fase, **Px** varia in modo continuo da 1 a 0.

2° fase = angolo α da π/2 a π

In questa fase, **Px** varia in modo continuo da 0 a -1.

3° fase = angolo α da π a 3/2 π

In questa fase, **Px** varia in modo continuo da -1 a 0.

4° fase = angolo α da 3/2π a 2π

In questa fase, **Px** varia in modo continuo da 0 a 1.

Se analizziamo complessivamente le 4 fasi, ci accorgiamo che la coordinata **X** del punto P varia in modo continuo da un massimo (1) a un minimo (-1) in funzione dell'angolo di rotazione.**α**

FASE	ANGOLO	Proiezione Px	Proiezione Py
0	**0°**	**+1u**	**0**
1	**90°**	**0**	**+1u**
2	**180°**	**-1u**	**0**
3	**270°**	**0**	**-1u**
4	**360°**	**+1u**	**0**

Osservando il movimento di **Px** durante la rotazione **P** ci accorgiamo che questo, altro non è che un oscillazione orizzontale .

(vedi animazione 01)

Se osserviamo i valori di **Px** e di **Py**, risultano essere sfasati di **π/2** (quando Py è 0 Px è 1; quando Py è 1 Px è 0;quando Py è 0 Px è -1; quando Py è -1 Px è 0)

La coordinata **Px**, in trigonometria prende il nome di coseno dell'angolo **α** e si indica con **cos α**.

Si definisce coseno di α la coordinata Px di un punto generico P della circonferenza trigonometrica.

Rappresentiamo ora la funzione seno e la funzione coseno su un diagramma cartesiano.
Per fare questo, dobbiamo solamente considerare le 4 fasi viste nei 2 casi.
Rappresenteremo in uno stesso grafico in **rosso** la funzione seno.

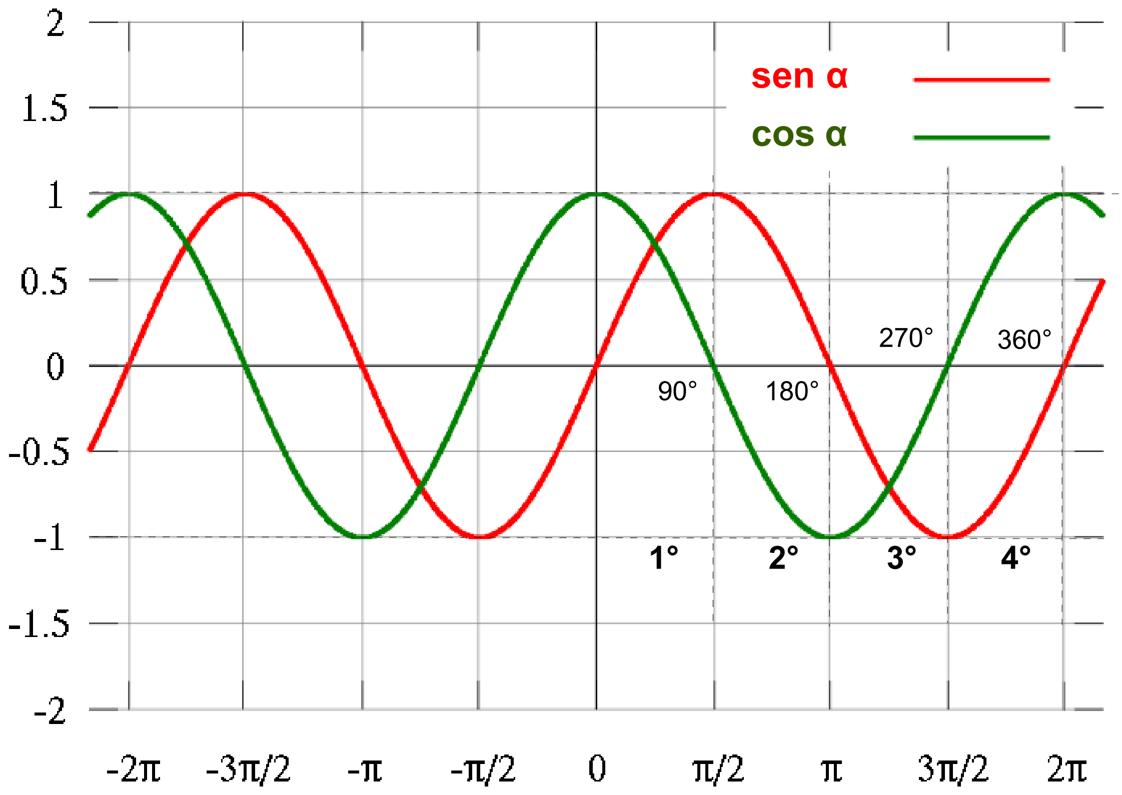
Y= sen α

E in **verde** la funzione coseno.

X= cos α

Per completare il diagramma operiamo con 2 tabelle che indicano le 4 fasi.

Fase	**α°** (gradi)	**α** (radianti)	Sen α	Cos α
0	**0**	**0**	**0**	**+1**
1	**90°**	**π/2**	**+1**	**0**
2	**180°**	**π**	**0**	**-1**
3	**270°**	**3π/2**	**-1**	**0**
4	**360°**	**2π**	**0**	**+1**



(Ovviamente per il **cos α** i valori da +1 a -1 si riferiscono all'asse X della circonferenza trigonometrica mentre per il **sen α** i valori da +1 a-1 si riferiscono all'asseY della circonferenza trigonometrica)

Come si può notare dai 2 grafici, la curva del coseno è spostata di una fase rispetto a quella del seno.

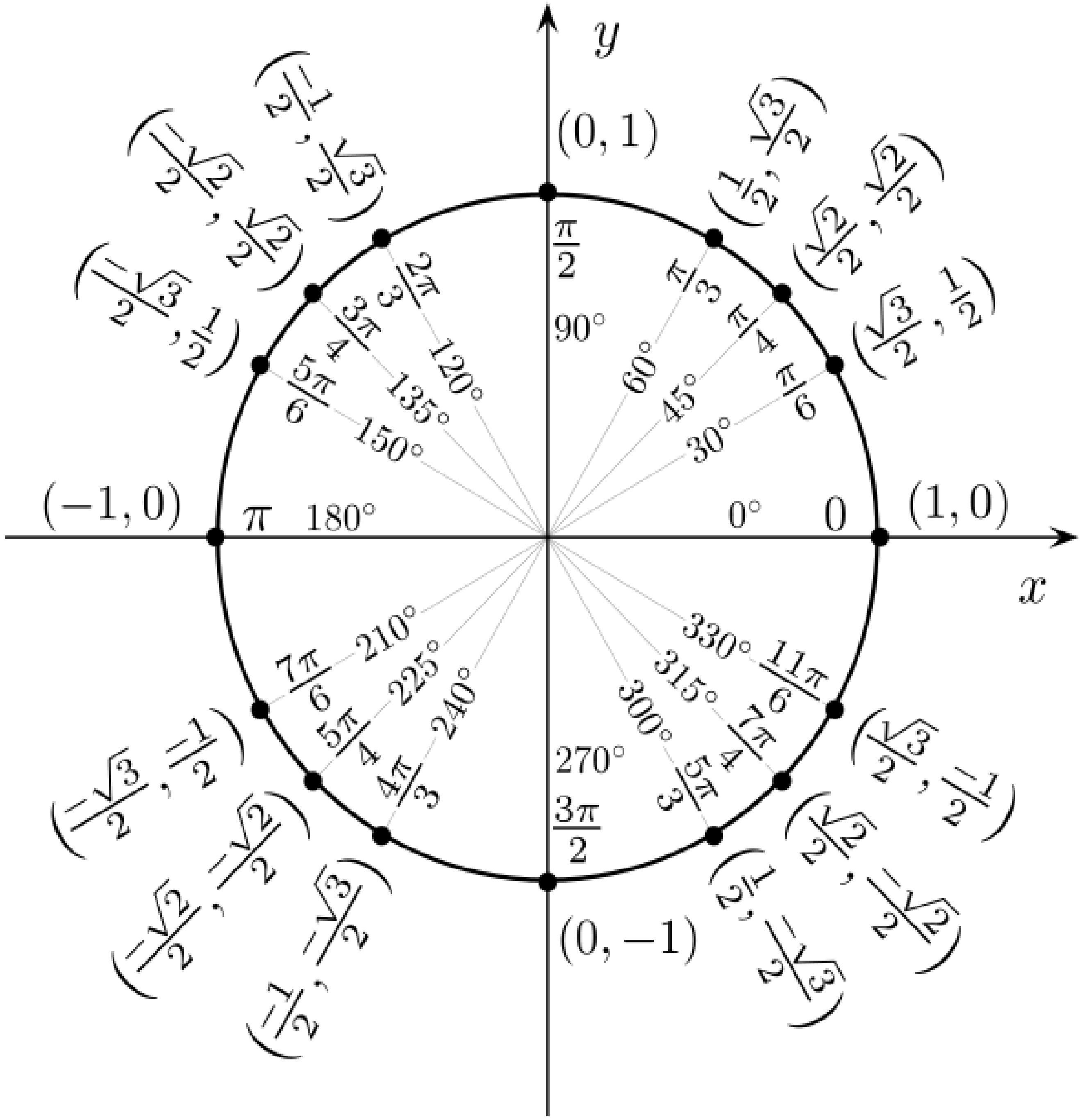
Come abbiamo visto, ogni fase corrisponde a una rotazione di 90° (π/2 radianti).

Siccome il coseno è spostato di una fase, possiamo dire che la curva del coseno è "sfasata" di 90° (π/2 radianti) rispetto a quella del seno.

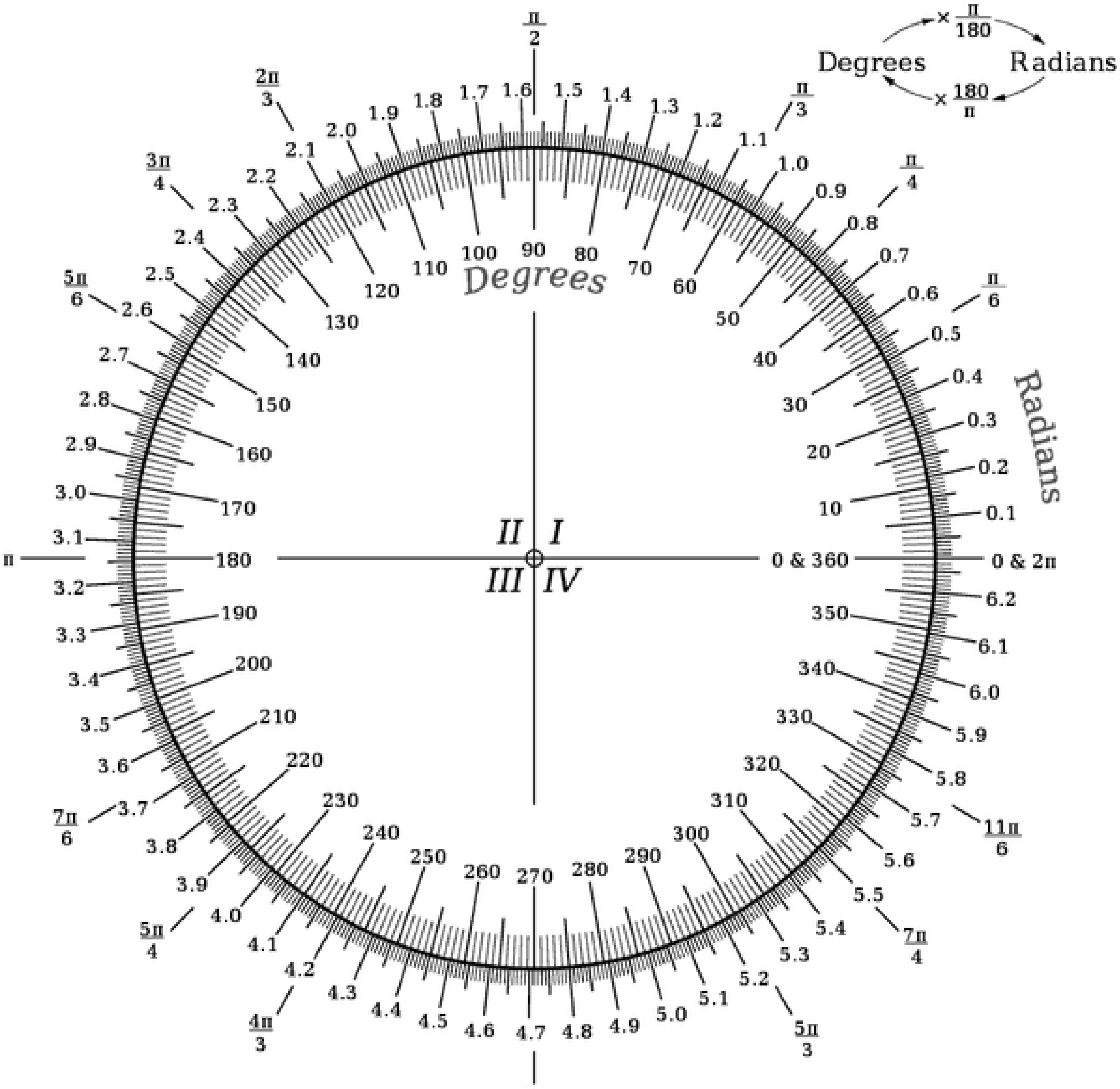
Possiamo così raccogliere tutte le informazioni che abbiamo imparato in una circonferenza trigonometrica su cui, oltre agli angoli multipli di 30° , espressi sia in gradi sia in radianti, abbiamo segnato anche i valori di seno e coseno di **α.**

I valori di seno e coseno sono espressi da una coppia ordinata di numeri che corrispondono alle coordinate cartesiane del nostro punto

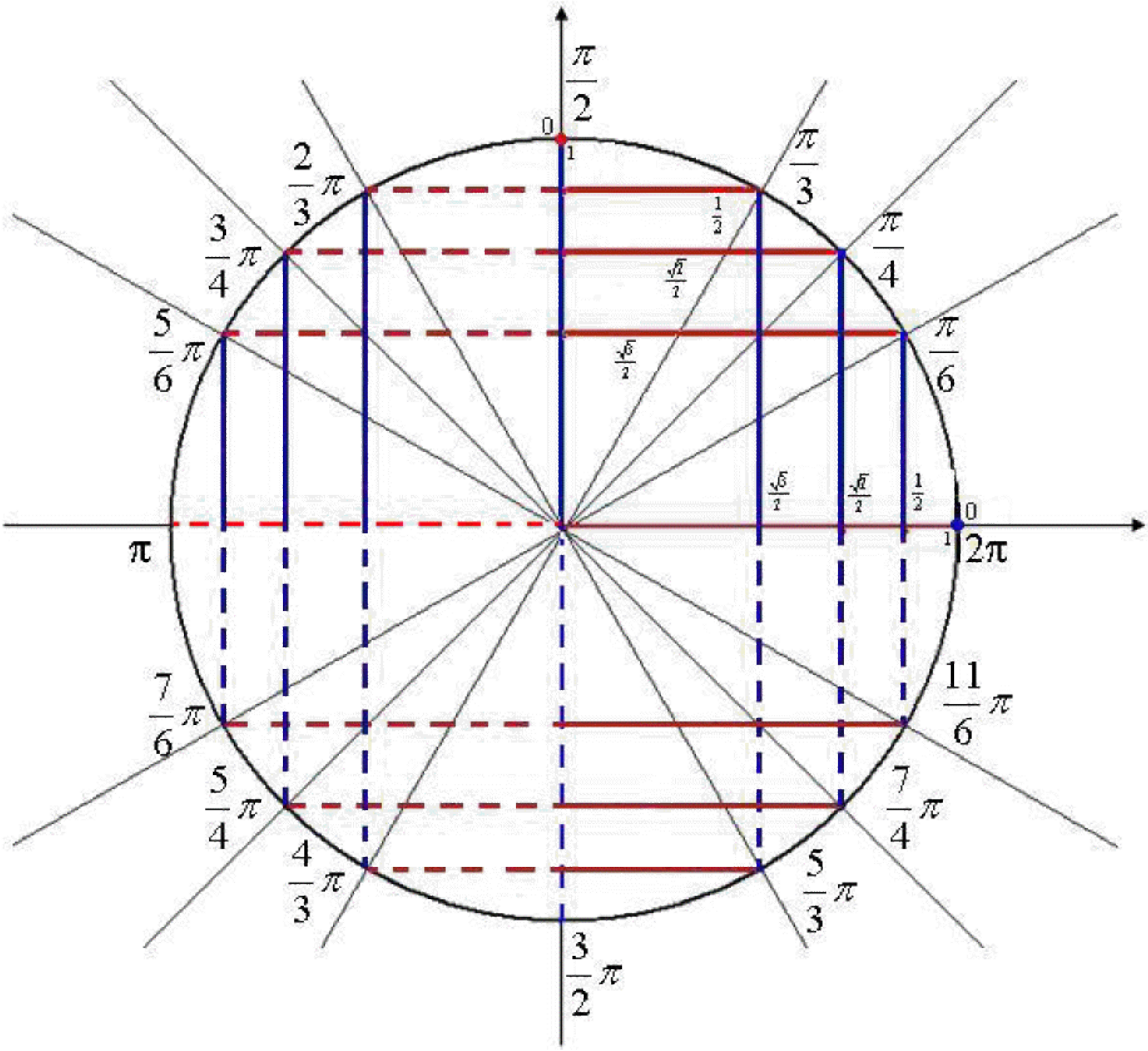
la prima coordinata (**Px**) rappresenterà perciò il coseno di **α,** la seconda coordinata (**Py**) rappresenterà il seno di **α.**



y
x
$(0,1)$
$(1,0)$
$(-1,0)$
$(0,-1)$
$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$
0 0°
$\frac{\pi}{6}$ 30°
$\frac{\pi}{4}$ 45°
$\frac{\pi}{3}$ 60°
$\frac{\pi}{2}$ 90°
$\frac{2\pi}{3}$ 120°
$\frac{3\pi}{4}$ 135°
$\frac{5\pi}{6}$ 150°
π 180°
$\frac{7\pi}{6}$ 210°
$\frac{5\pi}{4}$ 225°
$\frac{4\pi}{3}$ 240°
$\frac{3\pi}{2}$ 270°
$\frac{5\pi}{3}$ 300°
$\frac{7\pi}{4}$ 315°
$\frac{11\pi}{6}$ 330°



Degrees
Radians
× π/180
× 180/π
I
II
III
IV
0 & 360
0 & 2π
180
π
90
π/2
270
3π/2



$\frac{\pi}{2}$
0
1
$\frac{2}{3}\pi$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
0
π
1
2π
$\frac{7}{6}\pi$
$\frac{11}{6}\pi$
$\frac{5}{4}\pi$
$\frac{7}{4}\pi$
$\frac{4}{3}\pi$
$\frac{5}{3}\pi$
$\frac{3}{2}\pi$

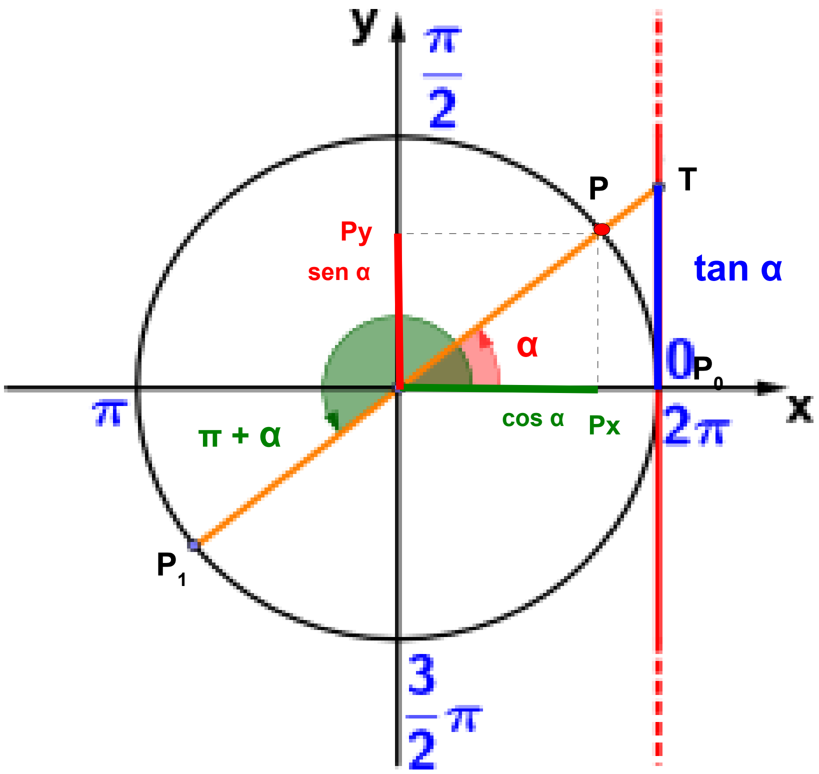
LA TANGENTE TRIGONOMETRICA DI UN ANGOLO

Fino ad ora abbiamo considerato i concetti di base legati alla circonferenza trigonometrica.

Adesso, dopo aver capito cosa rappresentano il **seno** ed il **coseno** di un angolo, aver visto che il loro studio si basa sempre sui concetti di geometria che abbiamo acquisito studiando il triangolo rettangolo ed i teoremi ad esso associati, possiamo approfondire la conoscenza di altri parametri che ci saranno utili per studiare le onde radio.
Il prossimo parametro che andremo a considerare sarà la tangente trigonometrica di un angolo.

Come sappiamo fin dalla prima media, la tangente ad una qualsiasi figura è un qualche cosa che “tocca” la figura data e con essa condivide solamente un punto.

Applichiamo esattamente lo stesso concetto ad una retta tangente alla nostra circonferenza trigonometrica.



Questa volta facciamo proseguire il raggio che passa per il punto P e, dopo aver tracciato il diametro **P P_1**, proseguiamo fino ad intersecare la retta tangente alla circonferenza nel punto **P_0** .

Troviamo così il punto **T**.

La lunghezza del segmento **P_0 T** rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo **α** e dell'anglo **π + α**

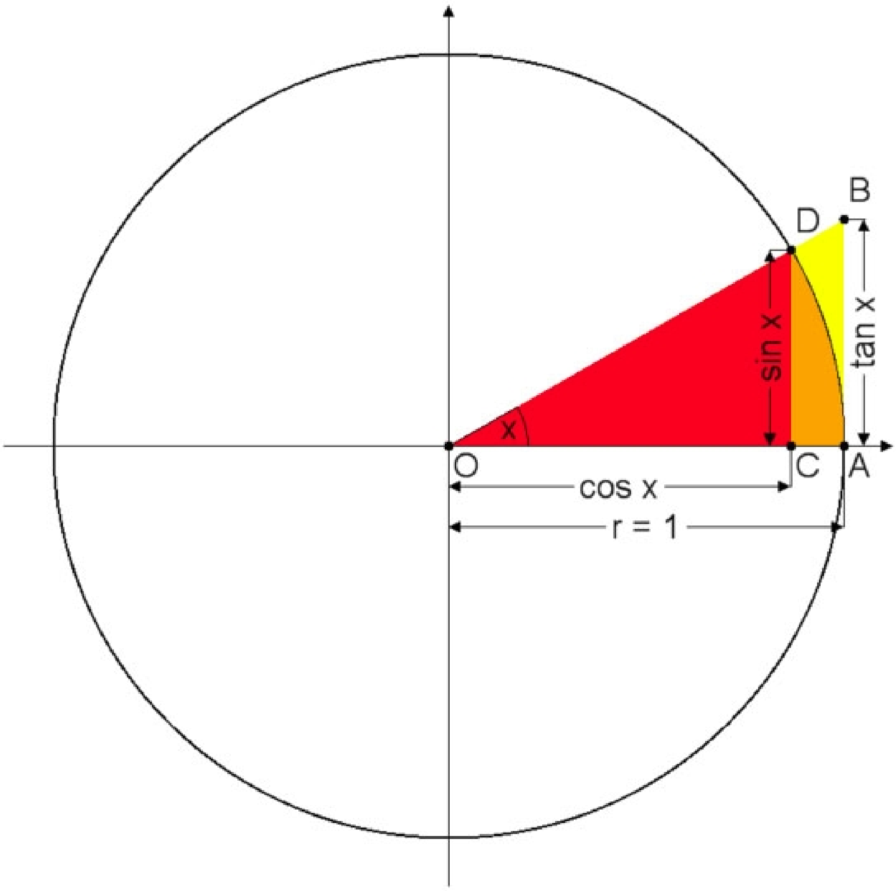
Se pensiamo alla nostra lucina che gira possiamo notare che la tangente è 0, per **α**=0° e per **α**=180° e varia da 0 a + infinito per **α** che varia da 0° a 90° e da 180° a 270° , mentre varia da – infinito a 0 per **α** che varia da 90° a 180° e tra 270° e 360°

Si può cosi costruire la seguente tabella andando a considerare le fasi viste in precedenza, ma questa volta considerando le variazioni all'interno di ogni fase.

Fase	α° (gradi)	α (radianti)	Sen α	Cos α	tan α
1	da **0°** a **90°**	da **0°** a **π/2**	da **0** a **+1**	da **+1** a **0**	da **0** a **+∞**
2	**90°** a **180°**	da **π/2** a **π**	da **+1** a **0**	da **0** a **-1**	da **-∞** a **0**
3	**180°** a **270°**	da **π** a **3π/2**	da **0** a **-1**	da **-1** a **0**	da **0** a **+∞**
4	**270°** a **360°**	da **3π/2** a **2π**	da **-1** a **0**	da **0** a **+1**	da **-∞** a **0**

Come possiamo notare dalla figura seguente anche per la tangente vale tutto quanto visto per il triangolo rettangolo.

Questa volta ciò che rimane costante è il cateto orizzontale mentre quello verticale e l'ipotenusa variano al variare dell'angolo **α**.



Nel caso della tangente si considera la misura del cateto verticale in quanto quello orizzontale è sempre 1u perchè rappresenta il raggio.

Dal disegno possiamo vedere che si sono originati due triangoli rettangoli in cui il primo ha come cateti il seno ed il coseno dell'angolo che viene indicato con **x**, mentre il secondo ha come cateti il raggio (**OA**) e la tangente di **x**

Se consideriamo i due triangoli **OCD** e **OAB** possiamo dire che sono due triangolo simili in quanto sono entrambi retti, hanno l'angolo **BOA** in comune e per tanto gli angoli **ODA** e **OBA** devono essere per forza congruenti (**OAB+OBA+BOA = 180° = OCD + ODC + DOC**).

Essendo triangoli simili il rapporto tra i lati corrispondenti sarà sempre costante e può essere trattato come una proporzione (**OA:OC = AB:CD = BO:DO**).

Da quanto visto fino ad ora possiamo dire che:

OC = cos x

CD = sen x

AB = tan x

OA = OD = 1u (raggio circonferenza trigonometrica)

consideriamo perciò la proporzione

1u : cos x = tan x : sen x

da questo si può ricavare la tangente applicando le proprietà delle proporzioni

tan x =sen x * 1u : cos x

che possiamo riscrivere anche nel seguente modo

tan x = (sen x / cos x) *1u

se dividiamo la lunghezza del segmento tangente per 1u otteniamo un numero puro che è il valore della tangente nella circonferenza trigonometrica .

Si potrà perciò definire la tangente nel seguente modo:

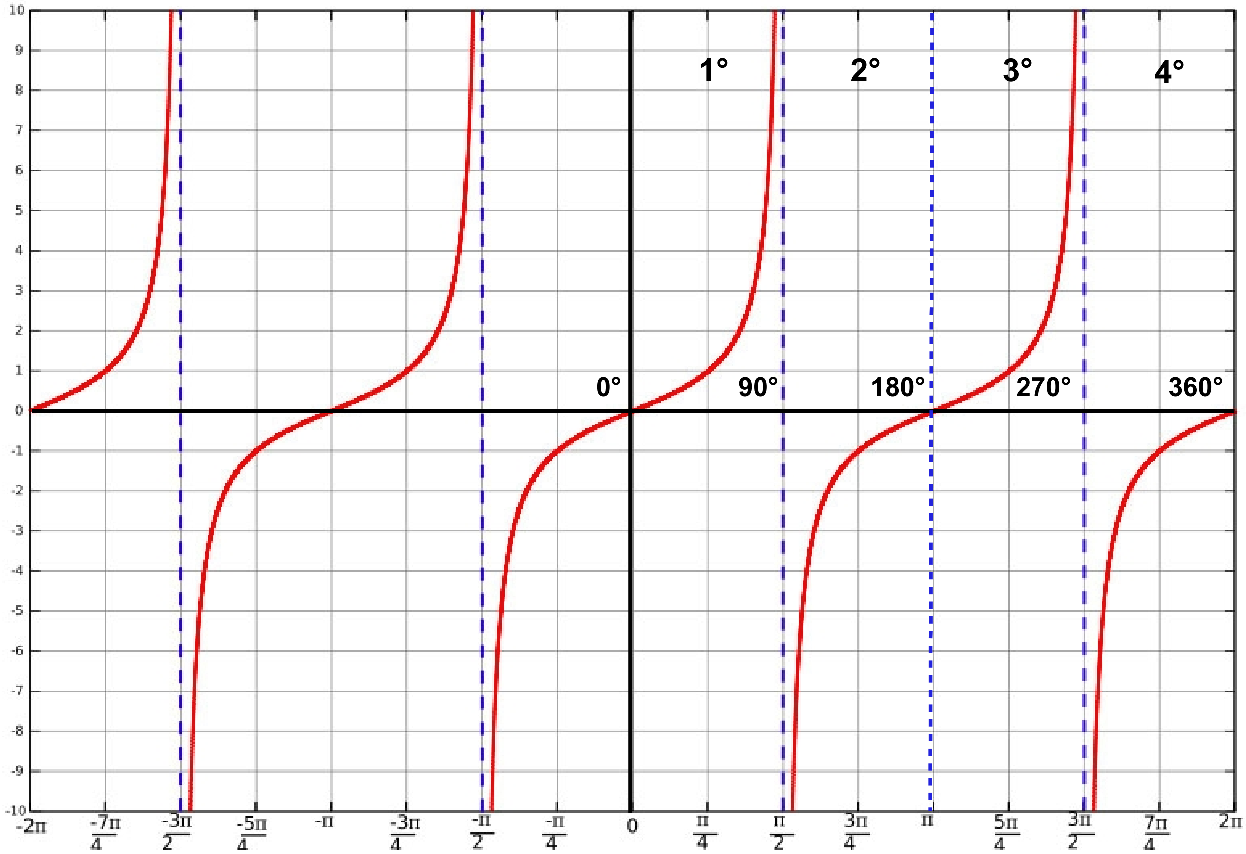
Si definisce tangente trigonometrica di un angolo il rapporto tra il valore del seno e quello del coseno dello stesso angolo.

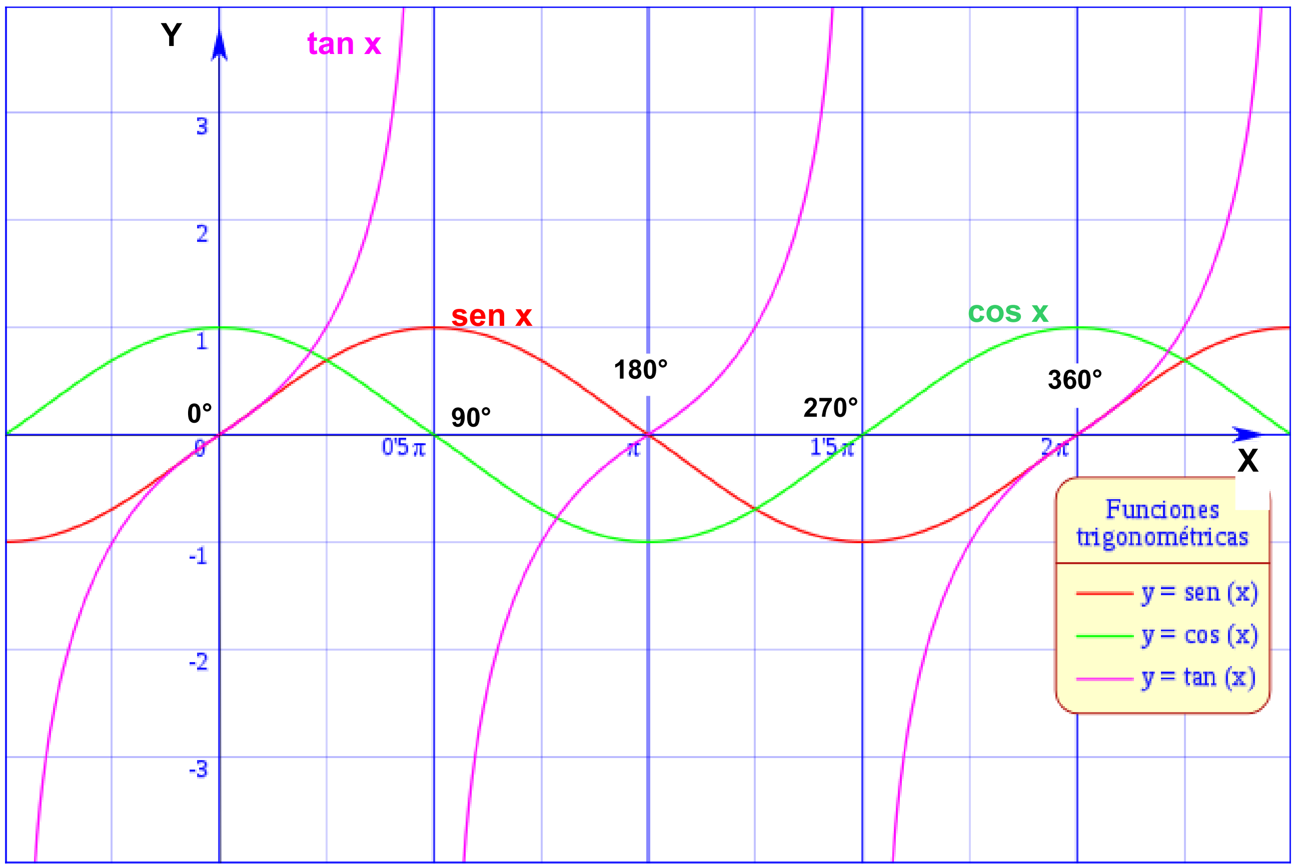
La funzione tangente, a differenza delle funzioni seno e coseno, non è perciò rappresentata da una curva continua.

Al passaggio dalla fase1 alla fase 2 (da un angolo minore di 90° ad uno appena maggiore) il suo valore cambia bruscamente da +infinito a -infinito (in pratica non si può definire il valore della tangente per l'angolo di 90°) e la stessa cosa accade al passaggio dalla fase 3 alla fase 4 (da un angolo appena minore di 270° ad uno appena superiore) in cui notiamo che il suo valore passa all'improvviso da +infinito a -infinito (anche in questo caso non è possibile stabilire il suo valore per l'angolo di 270°).

Il risultato di tutto questo è che si origina una funzione “discontinua” sia a 90° sia a 270°.

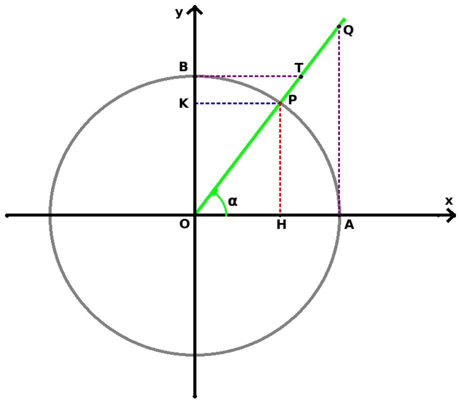
il grafico si interrompe ed inizia a disegnarsi un altra curva.


1°
2°
3°
4°
0°
90°
180°
270°
360°
-2π
$-\frac{7\pi}{4}$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{5\pi}{4}$
-π
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$
2π


Y
tan x
sen x
cos x
0°
90°
180°
270°
360°
0'5 π
π
1'5 π
2 π
X
Funciones trigonométricas
y = sen (x)
y = cos (x)
y = tan (x)

LA COTANGENTE DI UN ANGOLO

Consideriamo ancora la nostra circonferenza trigonometrica e facciamo altre osservazioni sul triangolo rettangolo .

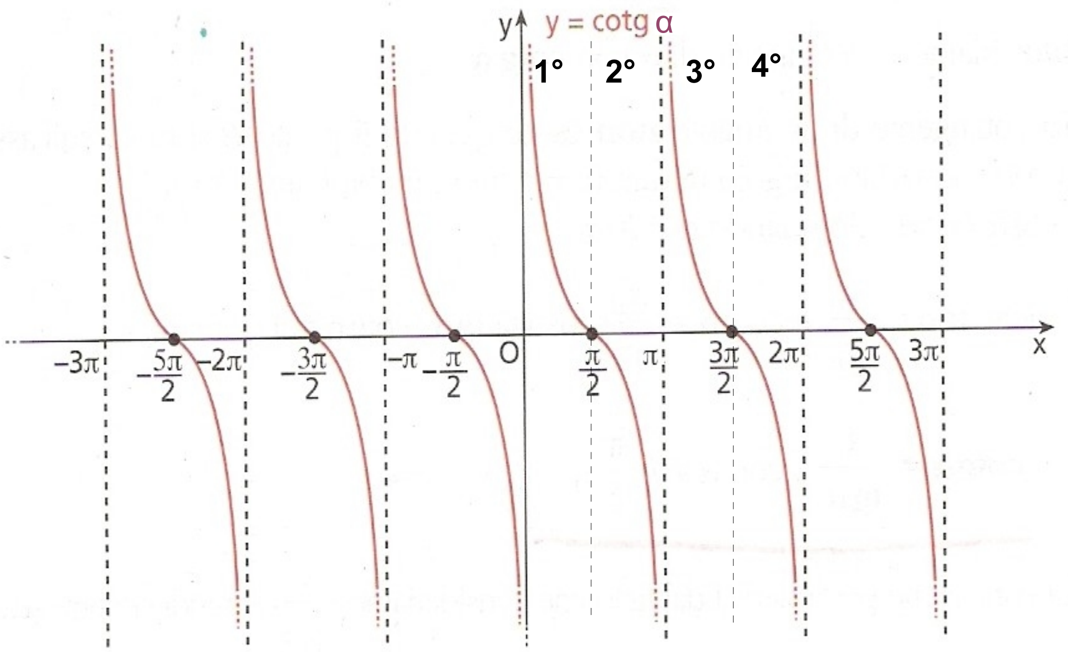


Si osservi il segmento **BT** nella figura soprastante.
Se si guarda bene è parallelo al segmento **KP** che è congruente al coseno di **α.**

Quando **α** è 0° **BT** è +/- infinito.
Quando **α** è 90° **BT** è zero
Quando **α** è 180° **BT** è +/- infinito
Quando **α** è 270° **BT** è zero
Quando **α** è 360°° **BT** è +/- infinito.

A guardarci bene **BT** varia come la tangente AQ ma solamente in modo “speculare”.

Risulta più facile capire questo concetto se osserviamo il grafico della variazione di **BT** in base all'angolo **α**.



Il segmento **BT** prende il nome di cotangente di **α**.

Fase	α° (gradi)	α (radianti)	Sen α	Cos α	tan α	cotg α
1	da **0°** a **90°**	da **0°** a **π/2**	da **0** a **+1**	da **+1** a **0**	da **0** a **+∞**	da **+∞** a **0**
2	**90°** a **180°**	da **π/2** a **π**	da **+1** a **0**	da **0** a **-1**	da **-∞** a **0**	da **0** a **-∞**
3	**180°** a **270°**	da **π** a **3π/2**	da **0** a **-1**	da **-1** a **0**	da **0** a **+∞**	da **+∞** a **0**
4	**270°** a **360°**	da **3π/2** a **2π**	da **-1** a **0**	da **0** a **+1**	da **-∞** a **0**	da **0** a **-∞**

Abbiamo visto fino ad ora i grafici relativi alla variazione di lunghezza di segmenti ed abbiamo chiamato queste variazioni “FUNZIONI” .

Ma in sostanza che cos'è una Funzione?

Matematicamente potremo dire che è la relazione che lega due grandezze variabili a cui abbiamo dato il nome di:

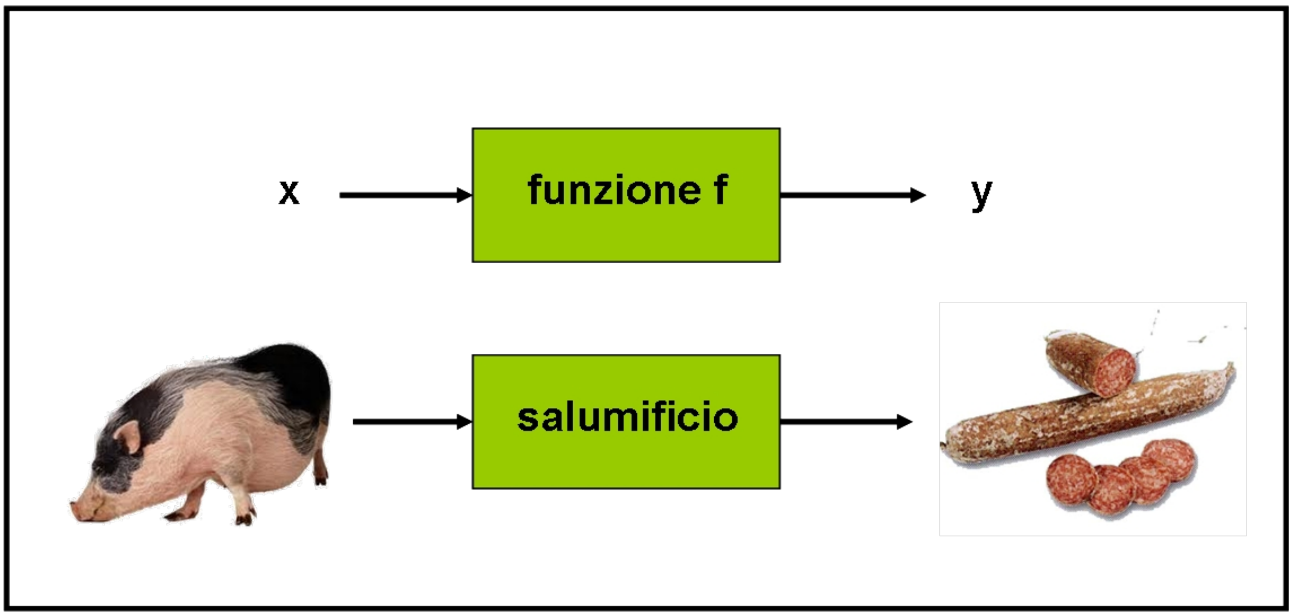
1) variabile “Indipendente”

2) variabile “Dipendente”

Nelle nostre rappresentazioni abbiamo considerato l'angolo **α** (angolo x) come variabile “Indipendente” , mentre i valori di seno, coseno, tangente o cotangente erano le nostre variabili “Dipendenti” (ovviamente sen x, cos x, tan x e cotg x, sono le nostre funzioni).

Come abbiamo potuto vedere, le variabili “Indipendenti” sono posizionate sull'asse X mentre le variabili “Dipendenti” sono posizionate sull'asse Y.

La figura seguente ben rappresenta il concetto di funzione (anche se non proprio in modo matematico classico).



In realtà una funzione è rappresentata da qualcosa che prende in considerazione una grandezza (la nostra variabile "Indipendente") e attraverso un determinato processo (matematico, geometrico, gastronomico, industriale, ecc...........), che è la nostra "Funzione", la trasforma, in un altra grandezza che è la nostra variabile"Dipendente".

Variabile "Indipendente" X

Variabile "Dipendente" Y

Dalla figura possiamo immediatamente capire che il maialino è la nostra variabile "Indipendente" X, il salumificio ed il processo di produzione è la nostra funzione (la relazione che trasforma), i prodotti finiti (soppresse, salami , prosciutti, salsicce....) sono le nostre variabili "Dipendenti".

In altre parole il maialino è il nostro angolo **α** , la circonferenza trigonometrica è il nostro salumificio mentre, il seno, il coseno, la tangente e la cotangente , sono i processi produttivi che portano a definire le lunghezze dei vari segmenti.

Proprio come le linee di lavorazione del salumificio portano alla produzione dei diversi tipi di salumi.

PROPRIETÀ FONDAMENTALI

Abbiamo fin qui visto la rappresentazione grafica di seno , coseno, tangente e cotangente di un angolo, abbiamo imparato a riconoscere i vari segmenti che rappresentano le singole grandezze ed a riconoscere i diversi tipi di "variazione" delle loro lunghezze.

Abbiamo imparato a capire e "vedere" una "funzione" (e questo ce l'ha spiegato benissimo il maialino), vediamo ora quali sono i rapporti reciproci tra queste importanti funzioni trigonometriche.

Abbiamo visto, dalla definizione di tangente, che la sua determinazione può essere effettuata anche calcolando il rapporto tra seno e coseno.

Per ciò che riguarda la cotangente possiamo dire che essa rappresenta l'inverso della tangente (dove la tangente è zero la cotangente è +/- infinito, mentre dove la tangente è +/- infinito la cotangente è zero). Se la tangente è perciò data dal rapporto seno/coseno allora la cotangente sarà data dal rapporto coseno/seno.

Le nostre "Funzioni" saranno perciò:

sen x

cos x

tan x

cotg x

Vediamo ora quali sono le relazioni che ci possono permettere di calcolare questi parametri .

Da quanto detto fino ad ora si avrà che:

tan x = .sen x/cos x

cotg x = cos x/sen x

Di conseguenza si avrà che (essendo la cotangente l'inverso della tangente)

tan x = 1 / cotg x = $(\textbf{cotg } x)^{-1}$

cotg x = 1 / tan x = $(\textbf{tan } x)^{-1}$

Detto questo sappiamo che tutto quello che ci serve sono sempre i teoremi sul triangolo rettangolo; teoremi che ci hanno accompagnato in questa parte di programma che poteva apparire molto complessa.

In realtà con le semplici conoscenze di base siamo arrivati a definire ed a destreggiarci in qualche modo anche con questa parte di calcoli all'apparenza più complessi.

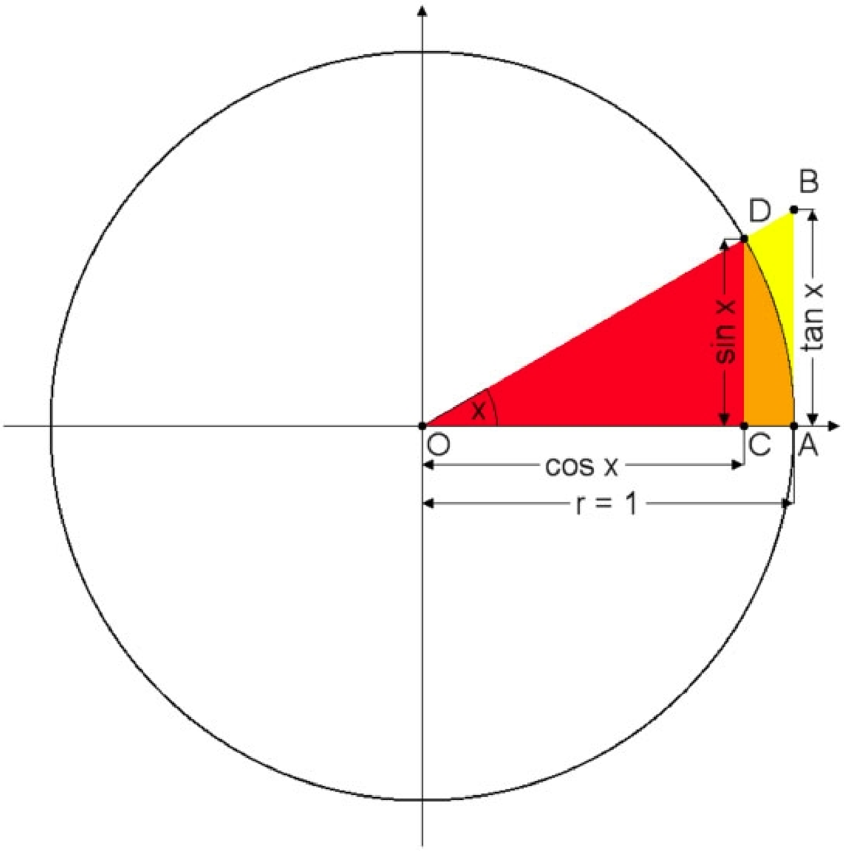
Ritorniamo ora a considerare il seno ed il coseno che, come abbiamo più volte ripetuto, non sono altro che rispettivamente il cateto verticale e quello orizzontale di un triangolo rettangolo che si origina all'interno della circonferenza trigonometrica.

Applichiamo ora il teorema di Pitagora al nostro triangolo **OCD** visto in precedenza ed analizzato per calcolare la tangente.

OD = ipotenusa

OC = cateto orizzontale = cos x

CD = cateto verticale = sen x



dal teorema di Pitagora possiamo ricavare che:

$$OD = \sqrt{OC^2 + CD^2} = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = 1$$

Questa relazione, come possiamo vedere è sempre valida per qualunque angolo si prenda in considerazione.

Ora, siccome la radice quadrata di 1 è sempre 1, possiamo dire che $\sqrt{\mathbf{1}}$ **= 1**
Allora possiamo concludere che, per qualunque angolo si prenda in considerazione, si avrà sempre:

$\mathbf{\cos^2 x + sen^2 x = 1.}$

Da ciò possiamo ricavare anche :

$\mathbf{\cos^2 x = 1 - sen^2 x}$

$\mathbf{sen^2 x = 1 - \cos^2 x}$

Al seguente indirizzo si possono ripassare i concetti principali utilizzando una simpatica video lezione.

http://www.youtube.com/watch?v=nTRhhTgydW8